目　　录

第一章　一些准备知识……………………………………………（1）
§1　Grassmann 代数，外积 ……………………………………（1）
§2　张量积 ……………………………………………………（2）
§3　同调代数 …………………………………………………（4）
§4　泛函分析方面的若干预备知识 ………………………………（6）
第二章　联合谱的定义及基本性质…………………………………（13）
§1　引　言 ……………………………………………………（13）
§2　Taylor 联合谱的定义 ………………………………………（14）
§3　近似联合点谱，混合谱 ……………………………………（17）
§4　联合谱的若干基本性质（Banach 空间情形） ………………（19）
§5　正则性的一个充要条件（Hilbert 空间情形） ………………（23）
§6　Taylor 联合本质谱和指标 …………………………………（27）
§7　夏道行联合谱 ……………………………………………（29）
第三章　正常算子组……………………………………………（31）
§1　正常算子组的 Taylor 谱 ……………………………………（31）
§2　正常算子组的谱子空间 ……………………………………（34）
§3　正常算子组的联合数值域和联合范数 ………………………（37）
§4　π_k 空间上的自共轭算子组的联合谱 …………………………（39）
§5　联合谱和多参数系统 ………………………………………（44）
第四章　非正常算子组……………………………………………（51）
§1　单个亚正常算子的一些性质 ………………………………（51）
§2　重交换亚正常算子组联合谱的直角分解 ……………………（53）
§3　重交换亚正常算子组联合谱的直角分割 ……………………（56）
§4　极分解和联合豫解式 ………………………………………（60）
§5　重交换亚正常算子组的广义记号算子组 ……………………（63）
§6　关于次正常算子组 …………………………………………（67）

第五章　非正常算子组的函数模型…………………………（70）
§1　重交换亚正常算子组的函数模型 …………………………（70）
§2　Mosiac 函数 …………………………………………………（79）
§3　Principal 函数和迹公式 ……………………………………（89）
§4　指标 …………………………………………………………（92）
§5　联合谱与公共约化子空间 …………………………………（96）
第六章　算子张量积的联合谱，联合本质谱和指标………（99）
§1　Banach 空间上算子的张量积 ………………………………（99）
§2　Hilbert 空间上算子的张量积 ………………………………（110）
§3　可解 C^* 代数的张量积 ……………………………………（116）
第七章　算子方程与联合谱 ……………………………………（127）
§1　Hilbert 空间上算子理想的一些基本结果 …………………（127）
§2　初等算子与 Taylor 联合谱 ………………………………（130）
§3　初等算子与联合分类谱 ……………………………………（135）
§4　初等算子的本质谱 …………………………………………（140）
第八章　闭算子组的联合谱 ……………………………………（147）
§1　引　言 ………………………………………………………（147）
§2　闭算子联合谱的定义 ………………………………………（148）
§3　基本性质 ……………………………………………………（150）
§4　无界正常算子组的联合谱 …………………………………（157）
第九章　无界算子代数与联合谱 ………………………………（161）
§1　GB^* 代数与 EC^* 代数…………………………………………（161）
§2　无界正常算子组 ……………………………………………（164）
§3　特征与联合谱 ………………………………………………（167）
§4　无界正常算子组的联合豫解式估计 ………………………（171）
第十章　联合数值域、联合范数及联合谱半径 ……………（177）
§1　重交换算子组的联合数值域 ………………………………（177）
§2　一类半亚正常算子组的联合达范性 ………………………（179）
§3　联合数值域的边界及 Arveson 的一个命题 ………………（181）

§4　无界正常算子组的联合数值域 ……………………………… (185)
第十一章　压缩算子组的联合谱与 $A_{\mathscr{G}_0}$ 代数 ……………… **(192)**
§1　重交换压缩算子组的联合酉扩张 ……………………………… (192)
§2　联合谱与 $A_{\mathscr{G}_0}$ 代数……………………………………………… (200)
第十二章　紧算子组与联合谱的摄动 …………………… **(210)**
§1　有限维空间上交换算子组的联合谱 …………………………… (210)
§2　Banach 空间上交换紧算子组 ………………………………… (213)
§3　紧正常算子组及联合 Weyl 定理 ……………………………… (218)
§4　混合谱与紧摄动 ………………………………………………… (222)
§5　有限重联合特征值的稳定性 …………………………………… (225)
第十三章　具有谱容量的交换闭算子组 …………………… **(232)**
§1　交换闭算子组的算子演算 ……………………………………… (232)
§2　具有谱容量的闭算子组 ………………………………………… (243)
参考文献 …………………………………………………………… **(252)**

第一章　一些准备知识

联合谱的理论需要涉及经典泛函分析以外的一些预备知识，例如同调代数、多复变函数论等，我们不准备多作介绍，而且在以后的章节中也尽量少用泛函分析以外的工具。但是有一些基本概念是不可少的，我们在此简单的叙述，以备读者参考。

§1　Grassmann 代数，外积

设 V 是 n 维实线性空间，$e_1,\cdots,e_n$ 是它的基，我们可以由 V 出发，导出一个具有数乘、加法和乘法的某种代数，称之为 Grassmann 代数 $G(V)$，它满足如下条件：

(a) I 和 V 生成 $G(V)$；

(b) I 是 $G(V)$ 的乘法单位元；

(c) 在 $G(V)$ 中，加法、数乘、及实数之间的加法和乘法运算，就是 V 和实数集原来的运算；

(d) 若 $G(V)$ 中的乘法用 $x\wedge y$ 表示，则 $x\wedge y=-x\wedge y$；

(e) 在 V 中存在基 $e_1,\cdots,e_n$，使 $e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n\neq 0$。

这样的 $G(V)$ 可用 V 的基构造出来。这就是在 V 的基之间引入外积 $\wedge$：

1° 结合律　$(e_{i_1}\wedge e_{i_2})\wedge e_{i_3}=e_{i_1}\wedge(e_{i_2}\wedge e_{i_3})$；

2° 分配律　$e_{i_1}\wedge(e_{i_2}+e_{i_3})=e_{i_1}\wedge e_{i_2}+e_{i_1}\wedge e_{i_3}$；

3° 反对称律　$e_{i_1}\wedge e_{i_2}=-e_{i_2}\wedge e_{i_1}$；

4° 关于数乘是齐次的　$\xi e_i\wedge e_j=\xi(e_i\wedge e_j)=e_i\wedge\xi e_j$。

考虑 $G(V)$ 中以下形式元素所成之集 $B^0,B^1,\cdots,B^n$：

B^0: 1;

B^1: $e_i, i=1,2,\cdots,n$;

B^2: $e_{i_1}\wedge e_{i_2}$, $i_1<i_2$, $1\leqslant i_1,i_2\leqslant n$;

B^p: $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$, $i_1<i_2<\cdots<i_p$, $1\leqslant i_1,\cdots,i_p\leqslant n$;

B^n: $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$。

以 B^p 中的元素作为基，用有限线性组合的方法生成线性空间 V^p。容易验证 B^p 中的$\binom{n}{p}$个元素是线性无关的，故 V^p 是$\binom{n}{p}$维的。我们称 V^p 为 V 的 p 级外代数。V^n 即 R，V^1 即 V。

于是 Grassmann 代数 $G(V)$ 正好是 $V^0\oplus V^1\oplus\cdots\oplus V^n$，它的维数为$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$。

本书经常把 V^p 记为 E_n^p，称为由不定元 e_1、$e_2,\cdots,e_n$ 产生的 p 级外代数。

§2 张量积

一、代数张量积（参见［89］）

设 M 是一个可交换的加法群，R 是有单位元 1 的环，若对 $a\in R$，$x\in M$，可定义乘法 ax，满足

(1) $a(x+y)=ax+ay$, $\forall x,y\in M$;

(2) $(ab)x=a(bx)$, $\forall a,b\in R$;

(3) $1\cdot x=x$,

则称 M 是环 R 的左模，记为 $_RM$。若乘法改为 xa，且相应地有

(1') $(x+y)a=xa+ya$;

(2') $x(ab)=(xa)b$;

(3') $x\cdot 1=x$,

则称 M 是环 R 上的右模，记为 M_R。

设给了环 R 上的右模 M_R 和左模 ${}_RN$，让我们来定义 M_R 和 ${}_RN$ 的张量积。为此我们先构作一个以 $M\times N$ 中元素 (x,y) 为基构成的群 F，其元素为

$$n_1(x_1,y_1)+n_2(x_2,y_2)+\cdots+n_r(x_r,y_r),$$

这里 $x_i\in M$，$y_i\in N$，n_i 为整数。

上式中若 $(x_i,y_i)\neq(x_j,y_j)$，$i\neq j$，则它为 0 的充要条件是所有 $n_i=0$。令 G 是 F 的子群，其元素由形如

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y),\ (x,y+y')-(x,y)-(x,y'),$$

$(xa,y)-(x,ay)$ 的元素所生成，现在定义

$$M\otimes_R N=F/G,\ x\otimes y=(x,y)+G\in M\otimes_R N。$$

我们验证：$\otimes$ 是一个双线性映射，事实上

$$\begin{aligned}&(x+x')\otimes y-x\otimes y-x'\otimes y\\&=((x+x',y)+G)-((x,y)+G)-((x,y')+G))\\&=((x+x',y)-(x,y)-(x',y))+G=G=0,\end{aligned}$$

其中 0 为 F/G 中零元。同样可知

$$x\otimes(y+y')=x\otimes y+x\otimes y',\ xa\otimes y=x\otimes ay。$$

$M\otimes_R N$ 称为 M_R 和 ${}_RN$ 的代数张量积。

二、Banach 空间的张量积

设 X 和 Y 是两个 Banach 空间，它们是线性空间，当然可看作既是数域的左模又是数域的右模。按照 2.1 段可以定义 $x\otimes y$。$X\otimes Y$ 作为代数张量积，由形如 $x\otimes y$ 的有限线性组合所构成。$X\otimes Y$ 上可定义多种范数，常见有：

$$\|w\|=\inf\left\{\sum_{i=1}^n\|x_i\|\|y_i\|:\ \sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i=w\right\},\tag{1.1}$$

$$\|w\|=\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n\varphi(x_i)\psi(y_i)\right|:\ x_1,\cdots,x_n\in X,y_1,\cdots,y_n\in Y,\ \varphi\in X^*,\psi\in Y^*,\|\varphi\|\leqslant 1,\|\psi\|\leqslant 1;\ w=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\right\}。\tag{1.2}$$

容易验证，这确实是一个范数。

将 $X\otimes Y$ 依此范数完备化，得到一个 Banach 空间，称为 Banach 空间 X 和 Y 的张量积，记为 $X\hat{\otimes}Y$。

如果 H 和 K 是两个 Hilbert 空间，$H\otimes K$ 表示代数张量积，其中的元素如 $\sum_{i=1}^{m} h_i\otimes k_i$，$h_i\in H$，$k_i\in K$，在 $H\otimes K$ 上定义内积：

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} h_i\otimes k_i,\ \sum_{i=1}^{n} h'_i\otimes k'_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} \langle h_i, h'_j\rangle\langle k_i, k'_j\rangle,$$

这确实是一个内积，而且是上述 Banach 空间张量积定义中所给范数的特殊情形，将它完备化，即得 H 和 K 的张量积空间，记为 $H\hat{\otimes}K$。显然，如果 $\{e_\alpha\}$，$\{f_\beta\}$ 分别是 H 和 K 的正交基，则 $\{e_\alpha\otimes f_\beta\}$ 为 $H\hat{\otimes}K$ 的正交基。

§3 同调代数（参见 [89] ）

设 A 是具有单位元 1 的复数域 C 上的代数，有一个序列 $\{K_p, \partial_p\}_{p\in Z}$，其中 K_p 是左 A 模，∂_p 是 A 模同态。$K_p\to K_{p-1}$，Z 表示整数环，即存在如下的序列：

$$\cdots\to K_{p+1}\xrightarrow{\partial_{p+1}} K_p\xrightarrow{\partial_p} K_{p-1}\xrightarrow{\partial_{p-1}}\cdots,$$

如果上述序列满足 $\partial_p\circ\partial_{p-1}=0$，$p=0,\pm1,\pm2,\cdots$，则称 $\{K_p, \partial_p\}$（简记 K 或 (K,∂)）是一个复形，∂_p 称为边界算子。

每个复形都有其同调序列，它是一列商 A 模：

$$H_p(K)=H_p(K,\partial)=N(\partial_{p-1})/R(\partial_p),$$

这里 $N(\partial_{p-1})$ 是 ∂_{p-1} 的零空间，有时也记为 $\mathrm{Ker}\partial_p$，$R(\partial_p)$ 是 ∂_p 的值域，有时也记为 $\mathrm{Im}\partial_p$。一个复形称为正合，是指对任意 $p\in Z$，$N(\partial_{p-1})=R(\partial_p)$，即 $H_p(K)=0$。

在以上的定义中，我们假定 ∂_p 是从 K_p 到 K_{p-1}。也可以用另一种形式来定义复形 $K=\{K^p, \partial^p\}$，其中，∂^p 从 K^p 到 K^{p+1}，

$\delta^{p+1}\circ\delta^{p}=0$，相应地 $H^{p}(K)=N(\delta^{p})/R(\delta^{p-1})$。这种复形，有时也特称为上链复形，在不致引起误会的情形下，我们都统称之为"复形"。

若 $\{K^{p},\delta^{p}\}$ 和 $\{L^{q},\alpha^{q}\}$ 是两个复形，如果存在一列 A 模同态 f^{p}：$K^{p}\to L^{p}$，使得 $\alpha^{p}\circ f^{p}=f^{p+1}\circ\delta^{p}$ 成立，$p\in\mathbf{Z}$，则称 $\{f^{p}\}$ 是一个链同态。

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots\longrightarrow & K^{p} & \xrightarrow{\delta^{p}} & K^{p+1} & \longrightarrow\cdots \\ & \downarrow f^{p} & & \downarrow f^{p+1} & \\ \cdots\longrightarrow & L^{p} & \xrightarrow{\alpha^{p}} & L^{p+1} & \longrightarrow\cdots\end{array}$$

设 f 是上述的一个链同态，则可诱导出一个 A 模同态 f_{*}^{p}：将 $H^{p}(K)$ 映到 $H^{p}(L)$，规律是对所有的 $k\in N(\delta^{p})$ 有：

$f_{*}^{p}(k+R(\delta^{p-1}))=f^{p}(k)+R(\alpha^{p-1})$。

下面还要定义复形之间的正合关系。

设 $\{K^{p},\delta^{p}\}$，$\{L^{q},\alpha^{q}\}$，$\{M^{r},\beta^{r}\}$ 是三个复形，$\{f^{p}\}$ 和 $\{g^{q}\}$ 分别是 $K^{p}\to L^{p}$ 和 $L^{p}\to M^{p}$ $(p\in\mathbf{Z})$ 的链同态。如果对每个 $p\in\mathbf{Z}$，

$$0\longrightarrow K^{p}\xrightarrow{f^{p}}L^{p}\xrightarrow{g^{p}}M^{p}\to 0$$

是正合的，即 $N(f^{p})=0$，$R(f^{p})=N(g^{p})$，$R(g^{p})=M^{p}$，则称

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{f}L\xrightarrow{g}M\longrightarrow 0 \qquad (*)$$

是正合的。

我们有如下重要定理：

定理 3.1 若 $(*)$ 是正合的，则存在一列同态 $\{\theta^{p}\}$，使得

$$\cdots\longrightarrow H^{p-1}(M)\xrightarrow{\theta^{p-1}}H^{p}(K)\xrightarrow{f_{*}^{p}}H^{p}(L)$$
$$\xrightarrow{g_{*}^{p}}H^{p}(M)\xrightarrow{\theta^{p}}H^{p+1}(K)\longrightarrow\cdots \qquad (**)$$

也是正合的。

这个定理是说由短正合列(＊)可导出长正合列(＊＊)。证明可见 Jacobson[89]定理 6.3, p.334。这时的 θ 可以定义为

$$\theta^p(m+R(\beta^{p-1}))=k+R(\delta^p),$$

这里 $m\in N(\beta^p)$，$k\in N(\delta^{p+1})$，$f^{p+1}(k)=\alpha^p(l)$，$g^p(l)=m$，l 是 L^p 中某元素。

§4　泛函分析方面的若干预备知识

本书涉及的泛函分析知识是多方面的，我们不可能在此一一列举。我们假定读者已具备夏道行等编著的《实变函数论与泛函分析》（下册）的知识。单个算子理论的知识可以参考哈尔莫斯的名著《希耳伯特空间问题集》（林辰译，1984 年，上海科技出版社），有关的定义和定理大都可在该书内找到。有些章节还须阅读其它专著，如第四章的非正常算子组就需要夏道行的《线性算子谱理论》(I) 的若干基本事实作为基础。

这里我们补充一些在上述夏道行和哈尔莫斯两本著作中没有列入但较常用到的若干基本事实。

一、无界算子理论（参见 [9]）

设 T 是定义在 Banach 空间 X 的子空间 D 上并映到 X 内的线性算子，D 称为 T 的定义域，记为 $D(T)$。若 $D(T)$ 在 X 中稠密，称 T 是稠定算子。我们称 T 是闭算子，是指如果 $x_n\in D(T)$，$x_n\to x$，$Tx_n\to y$，则有 $x\in D(T)$，且 $Tx=y$。

定理 4.1（逆算子定理） 若 T 是 Banach 空间 X 到 X 的线性算子，定义域为 $D(T)$，如果 T 是一对一的，而且 T 的值域充满整个空间 X，则 T^{-1} 存在而且是有界算子。

如果 T 是稠定算子，那么可以定义 T 的共轭算子 T^*，使得对任何 $f\in X^*$，有 $f(Tx)=f^*(x)=(T^*f)(x)$。

无界算子 T 的图象是指 $X\oplus X$ 中的子集 $G(T)=\{(x,Tx),$

$x\in D(T)\}$。设 T 和 S 是两个无界算子，如果 $x\in D(S)$ 时，$Sx=Tx$ 且 $G(T)\supset G(S)$，则称 T 是 S 的延拓，记为 $T\supset S$。

下面我们在 Hilbert 空间上进行讨论。

定理 4.2 设 T 是稠定算子，则 T 必有闭延拓，且 T^{**} 正是 T 的闭延拓。

线性算子 T 叫做对称的，是指对 $\forall x,y\in\mathscr{D}(T)$，均有 $(x,Ty)=(Tx,y)$。如果 T 还是稠定的，对称性等价于条件 $T^*\supset T$。特别地如 $T=T^*$，则称 T 是自共轭的。

设 T 是闭的对称算子，$D(T)^\perp$ 和 $R(T)^\perp$ 称为 T 的亏子空间（记为（H_T^+，H_T^-），其维数分别为 m 和 n（可能是有限数也可以是无限基数）。(m,n) 称为 T 的亏指数。

定理 4.3 T 是闭对称算子，则

$$D(T^*)=D(T)\oplus H_T^+\oplus H_T^-。$$

特别地，T 是自共轭的充要条件是亏指数为（0，0）。

定理 4.4 为了对称算子 T 具有自共轭的延拓，必须而且只须它的亏指数相等。

设 T 是稠定闭算子，而且有关系 $T^*T=TT^*$，则称 T 是正常算子。它有谱分解

$$T=\int_{\sigma(T)}zdE(z)$$

$E(z)$ 是复平面上取值为投影算子的可列可加测度。

二、算子代数（参见［66］）

设 $\mathscr{A}$ 是线性空间，其中定义有乘法并成为有单位元 e 的代数。如果在其中引入范数使之成为 Banach 空间，而且对此乘法有关系式：$\|f\cdot g\|\leqslant\|f\|\|g\|,(f,g\in\mathscr{A}),\|e\|=1$，则称 $\mathscr{A}$ 是 Banach 代数。

在 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 中可以引入一元素的豫解集和谱的概念。设 $x\in\mathscr{A}$，令 $\rho(x)=\{\lambda\in C;\ (x-\lambda e)^{-1}\in\mathscr{A}\}$，$C\backslash\rho(x)=\sigma(x)$。

$\rho(x)$与$\sigma(x)$分别为x在$\mathscr{A}$中的豫解集和谱。

$\mathscr{A}$中的子空间M称为右（左）理想，是指对任意$x\in\mathscr{A}$，$y\in M$，总有$xy\in M(yx\in M)$。若$\mathscr{A}$中元素可换，则不区分左、右理想，简称理想。如果没有别的理想N能包含$M(N=\mathscr{A}$除外)，则称M是极大理想。

$\mathscr{A}$是Banach空间，其上有线性连续泛函。对于Banach代数来说，更重要的是可乘线性泛函，即线性泛函f还具有性质

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\quad f(e)=1。$$

对于交换的Banach代数$\mathscr{A}$，极大理想和可乘线性泛函是一一对应的：可乘线性泛函的零空间是极大理想，反之亦然。

定理 4.5(Gelfand)　若$\mathscr{A}$是交换Banach代数，Δ是它的一切极大理想所成的集合，对$M\in\Delta$，相应地有可乘线性泛函h与之相应，对$x\in\mathscr{A}$，令$h(x)=x(M)$。我们将$x\to x(M)$称为x的Gelfand表示，于是成立以下结论：

(1) Δ是非空的紧空间，$x(M)$是Δ上连续函数；

(2) 将x映为$x(M)$的映射Γ是代数同态；

(3) $\|\Gamma(x)\|=\|x(M)\|_\infty=\sup\limits_{M\in\Delta}|x(M)|\leqslant\|x\|$；

(4) x可逆当且仅当$\Gamma(x)$在$C(\Delta)$中可逆；

(5) $\sigma(x)=\{x(M),M\in\Delta\}$。

Banach空间上一切线性有界算子构成Banach代数。由$\{A^n\}_{n=1}^{\infty}$和I生成的子空间是一个交换的Banach代数。下面再介绍一些定义。

定义 4.6　设$\mathscr{A}$是Banach代数，我们说$\mathscr{A}$上可定义对合运算，是指存在一个$\mathscr{A}$上映照$T\to T^*(T\in\mathscr{A})$，使得

(1) $T^{**}=T$，$T\in\mathscr{A}$；

(2) $(\alpha S+\beta T)^*=\bar{\alpha}S^*+\bar{\beta}T^*$，其中$S,T\in\mathscr{A}$，$\alpha,\beta\in C$；

(3) $(ST)^*=T^*S^*$。

如果还成立$\|T^*T\|=\|T\|^2(T\in\mathscr{A})$，则$\mathscr{A}$称为$C^*$代数。

Hilbert 空间上一切线性有界算子的全体记为 $L(H)$ 构成 C^* 代数。若$\mathscr{A}$是 $L(H)$的一个子代数，而且是弱闭的，则称 $\mathscr{A}$ 为 W^* 代数。

定义 4.7 若$\mathscr{A}$是 C^* 代数，$\mathscr{A}$上的复线性泛函 φ 如果满足 $\varphi(A^*A)\geqslant 0$，$\varphi(e)=1$，则称 φ 是态(State)。

若 φ 是$\mathscr{A}$上的态，则 $N=\{x\in\mathscr{A},\varphi(x^*x)=0\}$ 构成$\mathscr{A}$的闭左理想，φ 在商空间$\mathscr{A}/N$ 上可导出一个内积：

$(\hat{x},\hat{y})=\varphi(x^*y)$，$\hat{x},\hat{y}\in\mathscr{A}/N$，$x,y\in\mathscr{A}$是 $\hat{x},\hat{y}$ 的代表元素。

若 A 是 C^* 代数$\mathscr{A}$中的元素，则存在态 φ，使

$$\varphi(A^*A)=\|A\|。$$

C^* 代数$\mathscr{A}$的所有态构成对偶空间$\mathscr{A}^*$ 的一个弱 * 紧凸子集。这个子集中的端点称为纯态。

三、线性拓扑空间与凸集（参见［67］）

设 X 是线性空间，$K\subset X$。K 称为 X 中的凸集，是指：对任意的 $\alpha\in[0,1]$，任意的 $x,y\in K$，总有

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in K。$$

凸集 K 称为是吸收的，是指：对任意的 $x\in X$，总存在$\varepsilon>0$，使得当 $|\delta|\leqslant\varepsilon$ 时，$\delta x\in K$。此时必有 $0\in K$。我们把 $\rho_K(x)=\inf\{a>0,\ a^{-1}x\in K\}$称为集 K 的 Minkowski 泛函。

定理 4.8（凸子集的分离定理） 设 M 和 N 是线性空间 X 中的不相交凸集，并且 M 是吸收的，则存在非零的线性泛函 f，以及常数 c，使得 $\mathrm{Re}f(M)\geqslant c$，$\mathrm{Re}f(N)\leqslant c$，即超平面 $\mathrm{Re}f=c$ 分离 M 和 N。

定义 4.9（线性拓扑空间） 设 X 是线性空间，又是一个 Hausdorff 拓扑空间。如果 X 中的加法和数乘运算关于拓扑都是连续的，则称 X 是一个线性拓扑空间。

线性拓扑空间中子集 A 的闭凸包 $\overline{\mathrm{Conv}\,A}$，是指所有包含 A

的闭凸子集的交。

如果一个线性拓扑空间 X 具有凸集组成的邻域基，则称 X 为局部凸空间。

定理 4.10 设 K_1,K_2 是局部凸线性拓扑空间 X 中的两个不相交的闭凸子集，且 K_1 是紧集，则存在 X 上的连续线性泛函，常数 c，以及 $\varepsilon>0$，使得

$$\mathrm{Re}f(K_2)\leqslant c-\varepsilon<c\leqslant \mathrm{Re}f(K_1),$$

即超平面 $\mathrm{Re}f=c$ 严格分离 K_1 和 K_2。

定义4.11 （Γ 拓扑与弱拓扑） 设 X 是线性空间，其上的线性泛函全体记为 $X^+,\Gamma\subset X^+$。如果对任何 $f\in\Gamma,f(x)=0$ 可推知 $x=0$，则称 Γ 是全的。由全子集 Γ 在 X 中形成以下集合族

$$N=\{P;A,\varepsilon\}=\{q\in X:\ |f(p)-f(q)|<\varepsilon,f\in A\},$$

其中 $p\in X,\varepsilon$ 是正数，A 为 Γ 中的任意有限子集，这时以 N 构成邻域基的拓扑称为 X 中的 Γ 拓扑。如果 X 是线性拓扑空间，X 上的全体连续线性泛函记为 X^*，则 $X^*\subset\Gamma$，由 X^* 在 X 上导出的 X^*拓扑，称为弱拓扑。

定理 4.12 （Alology） 设有 Banach 空间 X，其共轭空间为 X^*，按照 $X\subset X^{**}$(X 嵌入 X^{**})在 X^* 中引入的 X 拓扑，X^* 中的闭单位球是紧的。

定理 4.13 Banach空间中弱紧子集的闭凸包仍然是弱紧的。

下面我们来介绍端点的概念。

定义 4.14 设 X 是线性空间，$K\subset X$，非空子集 A 称为 K 的端子集，是指：如果集合 K 中有两点 k_1,k_2，其凸组合：$ak_1+(1-a)k_2$，$0<a<1$，位于 A 中，则 $k_1\in A$，$k_2\in A$。端子集只有一点时，称该点为端点。

局部凸线性拓扑空间的非空紧子集一定有端点。

定理 4.15 (Klein-Milman) 若 K 是局部凸空间中的紧子集，E 是 K 的端点所成之集，则 E 的闭凸包 $\overline{\mathrm{conv}\,E}\supseteq K$。因此

$\overline{\mathrm{conv}(E)} = \overline{\mathrm{conv}(K)}$。若 K 是凸的，则 $\overline{\mathrm{conv}(E)}=K$。

四、可分解算子的一些结果（参见［69］）

设 X 是 Banach 空间，$L(X)$为 X 上有界线性算子全体。$T\in L(X)$。T 的不变子空间 Y 称为 T 的谱极大空间，是指对T的任意不变子空间，当$\sigma(T|Z)\subset\sigma(T|Y)$时，总有$Z\subset Y$。

$T\in L(X)$称为具有单值扩张性，如果对任意的 X 值解析函数 $f:D\to X$（$D\subset C$ 是开集）由 $(\lambda-T)f(\lambda)=0$，$\lambda\in D$，可推知 $f(\lambda)=0$，$\lambda\in D$。

定义 4.16 （可分解算子和SDP算子）设 $T\in B(x)$，如果对 $\sigma(T)$的任何有限开复盖$\{G_i\}_{i=1}^{n}$，存在T的谱极大空间$\{Y_i\}_{i=1}^{n}$，使得

$$X=\sum_{i=1}^{n}Y_i,\ \sigma(T|Y_i)\subset G_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

则称T是可分解算子。如果仅要求Y_i是不变子空间，其余不变，则称T是SDP算子。

定理 4.17 (Albrecht) SDP算子和可分解算子是等价的。

相仿地可以定义闭算子的可分解性质。

对可分解算子来说，局部谱的概念是重要的。

定义 4.18 设 A 是 Banach 空间 X 上的线性有界算子，$f(\lambda)$ 是 A 的豫解式 $R(\lambda,A)$ 的解析扩张，它是复平面C的开子集到 $L(x)$上的抽象解析函数，对给定的 $x\in X$，我们称

$\rho(A,x)=\{\lambda\in C:\ (\lambda-A)f(\lambda)=x$，$f(\lambda)$是 $R(\lambda,A)x$ 的解析扩张$\}$为算子 A 在 x 的局部豫解式，$C\backslash\rho(A,x)=\sigma(A,x)$ 称为 A 在 X 的局部谱。

任给平面上闭集 F，令

$$X_A(F)=\{x:\sigma(A,x)\subset F\}$$

可以证明 $X_A(F)$是线性流形，若 A 是可分解算子，则可证$X_A(F)$

是 A 的谱极大子空间。

定义 4.19（谱容度） 设$\mathscr{F}$表示C上所有闭集所成之族X中闭子空间所成之族记为μ。若 E 是$\mathscr{F}$到μ中的映射，且满足

(1) $E(\phi)=\{0\}$，$E(C)=X$；

(2) $E\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty} E(F_n), F_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$；

(3) 对C的任意有限开复盖$\{G_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$，有 $X=\sum_{i=1}^{n} E(\overline{G_i})$，则称 E 为谱容度；如果还有

(4) $E(F)\in \mathrm{Lat}(A)$（$\mathrm{Lat}\,A$ 表示 A 的不变子空间全体）；

(5) $\sigma(A|E(F))\subset F$，

则称 A 具有谱容度 E。

定理 4.20 A 是可分解算子的充要条件为 A 具有谱容度。

五、两个重要的结果

本书中我们会用到以下两个常见的定理。

定理 4.21（Putnam-Fuglede） 设 A_1 和 A_2 都是Hilbert 空间 H 上的正常算子，若 H 上的线性有界算子 B，能有 $A_1B=BA_2$，则必有 $A_1^*B=BA_2^*$。特别地，若 A 是正常算子，B 与 A 可交换，则 B 必和 A^* 可交换。

定理 4.22（Berberian） 若 A 是 Banach 空间 X 上的线性有界算子，则存在空间 X 的扩张 X^0，以及 X^0 上的线性有界算子 A^0，使得 A 的近似点谱 $\sigma_\pi(A)=\sigma_\pi(A^0)=\sigma(A^0)$。

这一扩张的方法，常被人们称为 Berberian 技巧（参见[37]）。

第二章 联合谱的定义及基本性质

一族算子的联合谱概念，最初由 R·Arens 和 A.P.Calderon 引进［35］。后来有许多人进行讨论，但最成功的一种联合谱是 J·L·Taylor 于 1970 年引进的［112］。此外，Dash［62］的联合谱也是重要的。夏道行［30］对非交换的自共轭算子组也引入一种联合谱。本章主要讨论 Taylor 的联合谱及其性质，并且给出一种分类。

§1 引 言

设 H 是复 Hilbert 空间，对 H 上的线性有界算子 T，我们用 T^{-1} 是否存在且是线性有界算子来确定 0 是否属于 T 的正则点。也就是说，对 $T\in L(H)$，若从 $L(H)$ 中可找到算子 S，使得 $TS=ST=1$，则认为 0 是正则点，否则为谱点。现在设有一个算子组 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，其中 $A_i\in L(H)$，$i=1,2,\cdots,n$。我们很自然想到如果存在 $B_1,\cdots,B_n\in L(H)$，使得

$$A_1B_1+\cdots+A_nB_n=I,$$

则认为 $(0,0,\cdots,0)\in C^n$ 是 A 的正则点，否则称为 A 的谱点。但这一定义是过于宽泛了。首先，从交换 Banach 代数的观点来看，应该假设 $A_1,\cdots,A_n$ 是两两可交换的。另外，为了使谱点不致太少，应对 $B_1,\cdots B_n$ 的范围加以限制，例如 $L(H)$ 中指定一个子代数 $(A)'$、$(A)''$ 或其它。但是，这样一来，联合谱的定义就会和子代数的选取有关。Albrecht 已经构造出例子［32］，说明在 $L(H)$ 中存在两个不同的极大交换子代数 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$，以它们为基准定

义的联合谱将是不同的。

比较成功的 Dash 谱是用$(A)''$来定义的。

定义 1.1 (Dash) 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是几个两两交换的算子组，$A_i\in L(X)$，$i=1,2,\cdots,n$。此处 $L(X)$指复 Banach空间 X 上线性有界算子全体。设(A)表示用$A_1,\cdots,A_n$ 生成的 $L(X)$ 中的闭子代数，$(A)''$为(A)的二次交换子。我们把复数组 $(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$ 称为算子组 A 的 Dash 谱点，当且仅当对一切 $(B_1,\cdots,B_n)$，$B_i\in(A)''$，$i=1,2,\cdots,n$，

$$\sum_{i=1}^{n}B_i(z_iI-A_i)\neq I,$$

其中 I 为恒等算子。A 的所有 Dash 谱点构成之集称为 A 的 Dash 谱，记为 $\sigma(A)$。

那么，能否由交换算子组直接定义联合谱，而根本不涉及任何子代数呢？Taylor 联合谱成功地做到了这一点。本书将主要讨论这种联合谱。

Taylor 联合谱和 Dash 谱对正常算子来说，二者是相同的，而 Sleeman [105] 在研究多参数微分方程时的所使用的多参数谱，正是自共轭算子组的 Taylor 联合谱。这也可以说是研究联合谱的一个实际背景。

本章的最后一节，将介绍夏道行给出的一种不是两两可交换的自共轭算子组的联合谱。

§2 Taylor 联合谱的定义

设 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 是 n 个不定元构成的集合，E_p^n 表示由 s 产生的 p 级外代数，外积用符号$\wedge$表示，记 $E^n=\bigoplus_{p=0}^{n}E_p^n$。设$X$是复 Banach 空间，用 $E_p^n(X)$表示张量积 $X\otimes E_p^n$，其中的元素记

为 $x\otimes s_{j1}\wedge s_{j2}\wedge\cdots\wedge s_{jp}$，$x\in X$，也简记为 $xs_{j1}\wedge s_{j2}\wedge\cdots\wedge s_{jp}$。有时 $E^n_p(X)$ 也写成 $\wedge^p[s_1,\cdots,s_n;X]$。设 $A=(A_1,\cdots A_n)$ 是 X 上的一组两两交换的算子组。我们定义一个映照 $d_p(A)$：$E^n_p(X)\to E^n_{p-1}(X)$ 如下（$d_p(A)$ 亦简记为 d_p）：

$$d_p(x\otimes s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p})=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}A_{j_i}x\otimes s_{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{s_{j_i}}\wedge\cdots\wedge s_{j_p},$$

这里 $\widehat{s_{ji}}$ 表示去掉这一项。我们还规定 $d_0=d_{n+1}=0$。这时我们得到的 d_p 是线性连续算子，而且容易算出 $d_p\circ d_{p+1}=0$。这样得到一个链复形：

$$0\xrightarrow{d_{n+1}}E^n_n(X)\xrightarrow{d_n}E^n_{n-1}(X)\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_2}E^n_1(X)\xrightarrow{d_1}E^n_0(X)\xrightarrow{d_0}0 \tag{2.1}$$

这一复形称为 Koszul 复形，记为 $E(X,A)$。

定义2.1（Taylor 联合谱） 若链复形 $E(A,X)$ 是正合的，即 $\mathrm{Im}d_p=\mathrm{Ker}d_{p-1}$，$p=1,2,\cdots,n+1$，则称 A 是正则的，否则称为奇异的。集合$\{(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$：$(z_1-A_1,\cdots,z_n-A_n)$是奇异的$\}$称为 A 的联合谱，记为$S_p(A)$。

例2.2（算子对的情形） 设 $A=(A_1,A_2)$，$A_1A_2=A_2A_1$。我们得到 $E(X,A)$：

$$0\xrightarrow{d_3}X\xrightarrow{d_2}X\oplus X\xrightarrow{d_1}X\xrightarrow{d_0}0,$$

其中 $d_2x=(-A_2x,A_1x)$，$d_1(x_1,x_2)=A_1x_1+A_2x_2$。这里我们把 $X\otimes E^2_2$ 等同于 X，$X\otimes E^2_1$ 等同于 $X\oplus X$。显然 A_1 与 A_2 可换意味着 $d_1\circ d_2=0$，而上述复形正合，意味着：(1) $\mathrm{Im}d_3=\mathrm{Ker}d_2=\{0\}$，即 $\mathrm{Ker}A_1\cap\mathrm{Ker}A_2=\{0\}$，(2) $\mathrm{Im}d_2=\mathrm{Ker}d_1$，即 $X\oplus X$ 中的元素(x_1,x_2)，若能使 $A_1x_1+A_2x_2=0$，则必有 $x\in X$，满足 $x_1=-A_2x$，$x_2=A_1x$，(3) $\mathrm{Im}d_1=\mathrm{Ker}d_0=X$，即 $\mathrm{Im}A_1+\mathrm{Im}A_2=X$。这表明$(A_1,A_2)$正则，不必要求 $\mathrm{Ker}A_1$ 与 $\mathrm{Ker}A_2$ 分别为 0，只须它们的交为 0，也不要求 $\mathrm{Im}\,A_1$ 与 $\mathrm{Im}\,A_2$ 分别等于 X，只要求它

们的线性和为 X。

Taylor 谱还有另一种定义方式。

仍以 $s=(s_1,\cdots,s_n)$ 表示不定元，E_p^n 表示由 s 决定的 p 级外代数，$E_p^n(X)=X\otimes E_p^n$。现在对交换算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$，以及 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$，定义 $\alpha(z)$ 为

$$(z_1-A_1)s_1+\cdots+(z_n-A_n)s_n,$$

我们在 $E^n(X)=\bigoplus_{p=0}^{n}E_p^n(X)$ 上定义左乘 $\alpha(z)$ 的算子：

$$\alpha(z)\wedge x\otimes s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p},$$

如果将 $\alpha(z)$ 限制在 $E_p^n(X)$ 上记为 $\alpha_p(z)$，则有

$$\alpha_p(z)\wedge(x\otimes s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p})=\sum_{k=1}^{n}(z_k-A_k)xs_k\wedge s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}.$$

同样容易验证 $\alpha_{p+1}(z)\circ\alpha_p(z)=0$，于是我们得到了一个链复形（规定 $\alpha_{-1}=\alpha_n=0$）

$$0\xrightarrow{\alpha_{-1}}E_0^n(X)\xrightarrow{\alpha_0}E_1^n(X)\xrightarrow{\alpha_1}\cdots\xrightarrow{\alpha_{n-2}}E_{n-1}^n\xrightarrow{\alpha_{n-1}}E_n^1(X)\xrightarrow{\alpha_n}0. \qquad (2.2)$$

定义 2.3 若链复形 (2.2) 是正合的，则称 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 为 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 的正则点，否则称为谱点。

定义 2.1 和定义 2.3 是等价的。事实上，我们可以令 $xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\to(-1)^{\varepsilon}xs_{i_1}\wedge s_{i_2}\wedge\cdots\wedge s_{i_{n-p}}$，其中 $\{i_1,\cdots,i_{n-p}\}=\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{j_1,\cdots j_p\}$，$\varepsilon=\left(\sum_{k=1}^{p}j_k\right)+p-n$，则容易看出这是 E_p^n 和 E_{n-p}^n 之间的一个同构。此外 d_p 则将 $E_p^n(X)$ 中 p 个不定元划去一个使之成为 $E_{p-1}^n(X)$ 元素，而 α_p 则将 $E_{n-p}^n(X)$ 中元素的 $n-p$ 个不定元添加一个使之成为 $E_{n-p+1}^n(X)$ 中的元素。容易验证有关系式 $\alpha_p\circ i_p=i_{p-1}\circ d_p$，亦即以下两复形是链同构的：

$$\begin{array}{ccccccc}0\to\cdots\to & E_p^n(X) & \xrightarrow{d_p} & E_{p-1}^n(X) & \to\cdots\\ & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} & \\ 0\to\cdots\to & E_{n-p}^n(X) & \xrightarrow{\alpha_{n-p}} & E_{n-p+1}^n(X) & \to\cdots\end{array}$$

显然，我们可以用同调模来刻划 Taylor 谱。令

$$H_p(E(X,A))=\mathrm{Ker}d_p/\mathrm{Im}d_{p+1},$$

则 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 正则，意味着 $H_p(E(X,A))=0, p=1,2,\cdots,n$。而 A 为奇异，必至少有一个 p，使 $H_p(E(X,A))$ 非零，所有非零的 $H_p(E(X,A))$ 的各种组合表示 A 为奇异的各种类型。

下面我们来讨论共轭算子组 $A^*=(A_1^*,\cdots,A_n^*)$ 的联合谱。先来看由 A 和 A^* 分别导出的链复形：

$$E(X,A):\ 0\xrightarrow{d_{n+1}}E_n^n(X)\xrightarrow{d_n}E_{n-1}^n(X)\to\cdots\xrightarrow{d_2}E_1^n(X)\xrightarrow{d_1}E_0^n(X)\xrightarrow{d_0}0.$$

$$E(X^*,A^*):\ 0\xrightarrow{\delta_{n+1}}E_n^n(X^*)\xrightarrow{\delta_n}E_{n-1}^n(X^*)\to\cdots\xrightarrow{\delta_2}E_1^n(X^*)\xrightarrow{\delta_1}E_0^n(X)\xrightarrow{\delta_0}0.$$

我们再从 $E(X,A)$ 导出新的复形

$$[E(X,A)]^*:\ 0\xleftarrow{d_{n+1}^*}E_n^n(X^*)\xleftarrow{d_n^*}E_{n-1}^n(X^*)\leftarrow\cdots\xleftarrow{d_2^*}E_1^n(X^*)$$
$$\xleftarrow{d_1^*}E_0^n(X^*)\xleftarrow{d_0^*}0,$$

其中 d_p^* 是 d_p 的共轭算子，$[E(X,A)]^*$ 构成复形是容易验证的。

通过直接验算可知

$$\begin{array}{ccccc}\cdots\to & E_p^n(X^*) & \xrightarrow{\delta_p(A^*)} & E_{p-1}^n(X^*) & \to\cdots\\ & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} & \\ \cdots\to & E_{n-p}^n(X^*) & \xrightarrow{d_p^*(A)} & E_{n-p+1}^n(X^*) & \to\cdots\end{array}$$

是交换图，于是我们证明了

命题 2.4 $E(X^*,A)$ 和 $[E(X,A)]^*$ 是链同构的。

定理 2.5 $S_p(A^*)=S_p(A), H_p(E(X,A))\cong H_p(E(X^*,A^*))$。

§3 近似联合点谱、混合谱

对 Taylor 联合谱的分类是一个困难的问题，这一节我们将介绍近似联合点谱的概念，并讨论一种混合谱，这是柴俊在他的

硕士论文中首次引入的［14］。

定义 3.1 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换算子组，$z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$ 称为 A 的联合近似点谱是指：存在一列单位向量 x_k，$\|x_k\|=1$，$k=1,2,\cdots$ 使得 $\|((z_i-A_i)x_k\|\to 0$ $(k\to\infty)$，$i=1,2,\cdots,n$。联合近似点谱记为 $\sigma_\pi(A)$。A^* 的联合近似点谱标为 A 的联合近似压缩谱，记为 $\sigma_\delta(A)$。$z=(z_1,\cdots,z_n)$ 称为 A 的联合点谱是指：存在非零向量 x，使 $(z_i-A_i)x=0$，$i=1,\cdots,n$，记为 $\sigma_p(A)$。A^* 的联合点谱称为 A 的联合剩余谱，记为 $\sigma_r(A)$。

定理 3.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换算子组，$z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$，算子组 $z-A=(z_1A_1,\cdots,z_n-A_n)$ 导出下列复形：

$$0\xrightarrow{\alpha_{-1}}E_0^n(X)\xrightarrow{\alpha_0}E_1^n(X)\to\cdots\to E_{n-1}^n(X)\xrightarrow{\alpha_{n-1}}E_n^n(X)\xrightarrow{\alpha_n}0,$$

则

(1) $z\in\sigma_\pi(A)$ 的充要条件是 $\mathrm{Ker}\alpha_0\neq\{0\}$ 或者 $\mathrm{Im}\,\alpha_0$ 在 $E_1^n(X)$ 中不闭；

(2) $z\in\sigma_\delta(A)$ 的充要条件是 $\mathrm{Im}\,\alpha_{n-1}\neq E_n^n(X)=X$。

证 (1) 直接从下列事实得出：α_0 下方无界的充要条件是 $\mathrm{Ker}\,\alpha_0\neq\{0\}$ 或者 $\mathrm{Ker}\alpha_0=\{0\}$，但 $\mathrm{Im}\,\alpha_0$ 不闭 以及 $\alpha_0x=\sum_{i=1}^n(z_i-A_i)xs_i$，$\|\alpha_0x\|=\sum_{i=1}^n\|(z_i-A_i)x\|$。

(2) $\mathrm{Im}\,\alpha_{n-1}$ 闭但不稠的充要条件是 $\mathrm{Ker}\alpha_{n-1}^*\neq\{0\}$，$\mathrm{Im}\,\alpha_{n-1}$ 稠但不闭的充要条件是 α_{n-1}^* 一对一但不下有界，这样就可得到 $\mathrm{Im}\,\alpha_{n-1}\neq E_n^n(X)$ 的充要条件是 α_{n-1}^* 不下有界。

推论 3.3 $\sigma_\pi(A)\subset S_p(A)$，$\sigma_\delta^-(A)\subset S_p(A)$。

下面给出混合谱的概念。

定义 3.4 设 $S_p(A)$ 是交换算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 的 Taylor 联合谱，凡是 $S_p(A)$ 中不属于 $\sigma_\pi(A)$ 和 $\sigma_\delta(A)$ 的谱点，称为 A 的混合谱点，记为 $\sigma_m(A)$。因此

$$\sigma_m(A)=S_p(A)\setminus(\sigma_\pi(A)\cup\sigma_\delta(A))。$$

命题 3.5 (1) $\lambda\in\sigma_m(A)$ 的充要条件是 $\lambda\in\sigma_m(A^*)$；(2) 如果 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 和 $B=(B_1,\cdots,B_n)$ 是两个交换算子组，并且存在可逆算子 $D\in L(X)$，使得 $A_i=DB_iD^{-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $S_p(A,X)=S_p(A,X)$，并且，它们的同调模 $\{H_p(E(X,A))\}$ 和 $\{H_p(E(X,B))\}$ 同构，特别 $\sigma_m(A)=\sigma_m(B)$。

证 (1) 由定理 2.5 可知，复形 $E(X,A^*)$ 和 $E(X,A)$ 是同构的，因此它们的同调模也是同构的，特别地，$\sigma_m(A)=\sigma_m(A^*)$。

(2) 设复形 $E(X,A)$ 与 $E(X,B)$ 是分别由 A 和 B 导出的复形，边界算子 $d_p(A)$ 和 $d_p(B)$ 满足关系 $Dd_p(B)D^{-1}=d_p(A)$。因此这两个复形彼此同构，特别地有 $\sigma_m(A)=\sigma_m(B)$。

例 3.6 (算子对的混合谱) 设 H 是可分的 Hilbert 空间，$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H 的标准正交基，U 是 H 上的单向移位算子，$Ue_i=e_{i+1}$，$U_i^*e_i=e_{i-1}$，$(e_0=0)$，$i=1,2,\cdots$。令 $K=H\otimes H$，$A_1=U\otimes 1$，$A_2=1\otimes U^*$，从而 $A=(A_1,A_2)$ 是K上交换算子对，它所导出的复形

$$0\xrightarrow{d_3}K\xrightarrow{d_2}K\oplus K\xrightarrow{d_1}K\xrightarrow{d_0}0\ .$$

由于 A_1 是等距，$\mathrm{Ker}A_1\cap\mathrm{Ker}A_2=\{0\}$。又 $\mathrm{Im}\,A_1$ 和 $\mathrm{Im}\,A_2$ 都闭，因此 $\mathrm{Im}\,d_1$ 是闭的，这样 0 不是联合近似谱点。又 $\mathrm{Im}A_2=K$，从而 $\mathrm{Im}\,d_1=K$，这样 0 不是联合近似压缩谱。但

$$d(0,e_1\otimes e_1)=A_2(e_1\otimes e_1)=e_1\otimes U^*e_1=0,$$

又 $e_1\otimes e_1\perp\mathrm{Im}A_1$，故 $(0,e_1\otimes e_1)\bar{\in}\mathrm{Im}\,d_2$，即 $0\in\sigma_m(A)$。

§4 联合谱的若干基本性质 (Banach 空间情形)

这一节将在 Banach 空间的情形，讨论联合谱的一些基本性质。首先，我们证明，Taylor 联合谱 $S_p(A)$ 包含在 Dash 联合谱

之中，即有

定理 4.1 设 $A=(A_1,\cdots A_n)$ 是 Banach 空间 X 上的交换算子组，若存在 $B=(B_1,\cdots,B_n)$ 是和 A 可交换的算子组，即 $A_iB_j=B_jA_i$，$i,j=1,2,\cdots,n$，且有 $A_1B_1+A_2B_2+\cdots+A_nB_n=I$，则 A 在 Taylor 意义下正则。

证 我们用 S_j 和 S_j^* 分别表示添加不定元 e_j 和划去不定元 e_j 的运算。记

$$S_A=A_1s_1+\cdots+A_ns_n,\quad S_B^*=B_1s_1^*+\cdots+B_ns_n^*,$$

设 $\xi=xe_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}\in E_p^n(X,A)$，则

$$S_A\xi=(A_1s_1+\cdots+A_ns_n)\wedge\xi=\sum_{i=1}^{n}(A_ix)e_i\wedge e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p},$$

$$S_B^*\xi=(B_1s_1^*+\cdots+B_ns_n^*)\wedge\xi=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(B_ix)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{e_{j_i}}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}。$$

经简单计算可知

$$(S_AS_B^*+S_B^*S_A)\xi=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_jB_k(s_js_k^*+s_k^*s_j)\xi=\xi。$$

最后一步的理由是当 $j\neq k$ 时，$s_js_k^*+s_k^*s_j=0$，$j=k$ 时，则为 I，而 $\sum_{i=1}^{n}A_iB_i=I$。这样一来，如果 $\xi\in\mathrm{Ker}(S_A)$，记 $\eta=S_B^*\xi$，则有 $S_A\eta=\xi$。即 $\mathrm{Im}d_{p-1}^*=\mathrm{Im}(S_A|_{E_{p-1}^n})$ 和 $\mathrm{Ker}d_p^*=\mathrm{Ker}(S_A|_{E_p^n})$ 相同。因此由 A 导出的复形正合。证毕。

由定理 4.1 可知，Dash 意义下正则必按 Taylor 意义下正则，于是 $S_p(A)\subset\sigma(A)$。

现在来证明 $S_p(A)$ 是 C^n 中的闭集，先给出参数化复形的定义。

定义 4.2 设 Λ 是拓扑空间。$\{Y_p\}$ 是一列 Banach 空间，$p=0,\pm1,\pm2,\cdots$。$d_p(\lambda)$ 是 Λ 到 $L(Y_p,Y_{p-1})$ 的连续映射，如果对任意的 $\lambda\in\Lambda$，$Y(\lambda)=\{Y_p,d_p(\lambda)\}$ 都是链复形，即对任意 p，

$d_p \circ d_{p+1}=0$，则称 $\lambda \to Y(\lambda)$ 是含参量入的 Banach 空间链复形。

如果对 $\lambda_0 \in \Lambda$，$Y(\lambda_0)$ 是正合的，即 $\mathrm{Im} d_{p+1}(\lambda_0)=\mathrm{Ker} d_p(\lambda_0)$，则由逆算子定理可知

$$d_{p+1}^{-1}(\lambda_0): \mathrm{Ker} d_p(\lambda_0) \to Y_{p+1}/\mathrm{Ker} d_{p+1}(\lambda_0)$$

仍是有界线性算子，以 $k_p(\lambda_0)$ 记它的范数，即

$$k_p(\lambda_0)=\sup\{\inf\{\|x\|: d_{p+1}(\lambda_0)x=y\}: \|y\| \leqslant 1, d_p(\lambda_0)y=0\}。$$

定理 4.3 设 $Y(\lambda), \lambda \in \Lambda$ 是参数化的 Banach 空间复形。若 $Y(\lambda_0)$ 是正合的，则对每个 p，存在 λ_0 的邻域 $U_p(\lambda_0)$，对于 $\lambda \in U_p(\lambda_0)$，复形 $Y(\lambda)$ 在 p 级正合，且 $k_p(\lambda)$ 在 $U_p(\lambda_0)$ 中有界。

证 取正数 γ 和 δ，使得 $k_p(\lambda_0)<\gamma$，$k_{p-1}(\lambda_0)<\gamma$，而 $\gamma\delta<\frac{1}{6}$。取 $U_p(\lambda_0)$，使当 $\lambda \in U_p(\lambda_0)$ 时有

$$\|d_p(\lambda)-d_p(\lambda_0)\|<\delta,$$
$$\|d_{p+1}(\lambda)-d_{p+1}(\lambda_0)\|<\delta。$$

我们将证明：若 $\lambda \in U_p$，$y \in \mathrm{Ker} d_p(\lambda)$，则存在 $x_1 \in Y_{p+1}$，$y_1 \in \mathrm{Ker} d_p(\lambda)$，使得 $y=y_1+d_{p+1}(\lambda)x_1$，而 $\|y_1\| \leqslant \frac{1}{2}\|y\|$，$\|x_1\| \leqslant 2\gamma\|y\|$。如能做到这一点，则由数学归纳法可构造序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，使得 $y=y_n+\sum_{k=1}^{n} d_{p+1}(\lambda)x_k$，$\|y_n\| \leqslant 2^{-n}\|y\|$，$\|x_n\| \leqslant 2^{-(n-2)}\gamma$。由此可知 $y=d_{p+1}(x)$，这里 $x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k$，$\|x\| \leqslant 4\gamma\|y\|$。这就说明，$\mathrm{Ker} d_p(\lambda)=\mathrm{Im}\, d_{p+1}(\lambda)$，而且 $k_p(\lambda) \leqslant 4\gamma$。

为了构造上述的 x_1 和 y_1，我们进行如下。首先，

$$\|d_p(\lambda_0)y\|=\|d_p(\lambda_0)y-d_p(\lambda)y\| \leqslant \delta\|y\|,$$

由于 $d_p(\lambda_0)y \in \mathrm{Ker} d_{p-1}(\lambda_0)$，则有 $y' \in Y_p$，使得 $d_p(\lambda_0)y'=d_p(\lambda_0)y$，于是 $\|y'\| \leqslant \|d_p(\lambda_0)^{-1}\|\ \|d_p(\lambda_0)y\| \leqslant \gamma\delta\|y\|$。这样一来，$y-y' \in \mathrm{Ker} d_p(\lambda_0)$，$\|y-y'\| \leqslant (1+\gamma\delta)\|y\|<2\|y\|$。现在再选 $x_1 \in Y_{p+1}$ 使得 $d_{p+1}(\lambda_0)x_1=y-y'$，$\|x\| \leqslant 2\gamma\|y\|$。令 $y_1=y-$

$d_{p+1}(\lambda)x_1$，则

$$\begin{aligned}\|y_1\| &= \|y-d_{p+1}(\lambda_0)x_1+d_{p+1}(\lambda_0)x_1-d_{p+1}(\lambda)x_1\| \\ &= \|y'+d_{p+1}(\lambda_0)x_1-d_{p+1}(\lambda)x_1\| \\ &\leqslant \|y'\|+\|d_{p+1}(\lambda_0)-d_{p+1}(\lambda)\|\|x_1\| \\ &\leqslant \gamma\delta\|y\|+2\gamma\delta\|y\|\leqslant 1/2\|y\|。\end{aligned}$$

这样 x_1, y_1 已构造出来了，定理也就证明了。

现在我们可得

定理 4.4 若 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 Banach 空间 X 上的交换线性有界算子组，则 $S_p(A)$是含在$\Pi(A)$中的紧子集，这里

$$\Pi(A)=D(A_1)\times\cdots\times D(A_n), D(A_i)=\{\lambda\in C;|\lambda|\leqslant r(A_i)\}$$

$r(A_i)$是 A_i 的谱半径。

证　若$(z_1,\cdots,z_n)\overline{\in}\Pi(A)$，则存在某个 i，z_i-A_i 有逆$(z_i-A_i)^{-1}$。今取 $B_1=B_2=\cdots=B_{i-1}=B_{i+1}=\cdots B_n=0$，$B_i=(z_i-A_i)^{-1}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}(z_i-A_i)B_i=\mathrm{I}。$$

这表明$(z_1,\cdots,z_n)$是A 在 Dash 意义下的正则点，由定理 4.1，它在 Taylor 意义下也正则，这表明 $S_p(A)\subset\Pi(A)$。由于定理 4.3，$(z-A)$导出的复形是有限级的有参量子的复形 $E(X,z-A)$，$z\in C^n$。若 z_0 是 A 的正则点，则对每一 $p, p=0,1,\cdots,n$，都有 $U_p(z_0)$，使当 $z\in U_p(z_0)$ 时仍为复形的正则点，取这些邻域的交集 $U(z_0)=\bigcup_{p=1}^{n}U_p(z_0)$，则对任何 $z\in U(z_0)$，由 $z-A$ 导出的含参量复形，均正则，这就说明 A 的正则点全体是开集，即 $S_p(A)$ 是闭集。但 $\Pi(A)$是 C^n 中有界集，故 $S_p(A)$是紧子集，证毕。

定理 4.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 和 $A'=(A_1,\cdots,A_n,A_{n+1})$ 都是 Banach 空间 X 上的可换的线性有界算子组，令 Π 是C^{n+1} 向前 n 个坐标方向的投影，则 $\Pi(S_p(A'))=S_p(A)$。

证明略去，请读者参看 Taylor [112]。

由定理 4.5 不难得出 $S_p(A)$是非空的结论。

我们还要不加证明地引用下述定理。

定理 4.6 (Taylor) 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 Banach 空间 X 上的可换的线性有界算子组，G 是含有 $S_p(A)$的 C^n 中的区域，$f_1,f_2\cdots f_m$ 在 G 内全纯，记 $f:G\to C^m$ 为 $f(z)=(f_1(z),\cdots f_m(z))$，$f(A)=(f_1(A),\cdots,f_m(A))$。则 $S_p(f(A),X)=f(S_p(A,X))$。

这是全纯函数的谱映照定理，证明详见 Taylor [113]。

§5 正则性的一个充要条件（Hilbert 空间情形）

这一节，我们考察 Hilbert 空间 H 上的线性有界算子组，如同 Banach 空间一样，可定义 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 导出的 Koszul 复形 $\{E_p^n(H,A),\ d_p^n(A)\}$。由于$H$ 的自共轭性，$[E_p^n(H,A)]^*=E_p^n(H^*,A)=E_p^n(H,A)$。若 $d_p^n(A):\ E_p^n(H,A)\to E_{p-1}^n(H,A)$，则 $(d_p^n)^*:\ E_{p-1}^n(H,A)\to E_p^n(H,A)$。

为了简单起见，下面我们在不致混淆的情况下，$E_p^n(H,A)$简写为 E_p^n，$d_p^n(A)$简写为 d_p^n 或 d_p。

引理 5.1 我们有如下的表示式：

(1) $E_k^n=E_k^{n-1}\oplus E_{k-1}^{n-1}$；

(2) d_k^n 可写成如下的矩阵形式：

$$d_k^n=\begin{pmatrix} d_k^{n-1} & (-1)^{k+1}\mathrm{diag}(A_n) \\ 0 & d_{k-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathrm{diag}(A_n)$表示对角线上均为 A_n，其余为 0 的矩阵。

证 (1) E_k^n 可分解为两部分：

$B_1=\{xe_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k};1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n-1\}$，

$B_2=\{xe_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_{k-1}}\wedge e_n;1\leqslant j_1<\cdots<j_{k-1}\leqslant n-1\}$，

E_k^n 的子空间 E_k^{n-1} 恰由 B_1 生成，E_{k-1}^{n-1} 则可自然同构于由 B_2 生

成的子空间，这就证明了(1)。

(2) d_k^n 是定义在 E_k^n 上的，将 E_k^n 直和分解为 $E_{k-1}^{n-1}\oplus E_k^{n-1}$，则 d_k^n 限制在不含 e_n 的 E_k^{n-1} 上时与 E_k^{n-1} 相同，限制在 E_{k-1}^{n-1} 上时，对不划去 e_n 的运算和 d_{k-1}^{n-1} 相同，对划去 e_n 的运算相当于作用 $(-1)^{k+1}A_n$，这就证明了（2）。

定义 5.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 Hilbert 空间 H 上的交换的线性有界算子组，$\{E_p^n,d_p\}$ 是由 A 导出的 Koszul 复形，则称以下的算子 $\hat{A}$ 为 A 导出的 Curto 算子

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ d_2^* & d_3 & \\ & d_4^* & \ddots \\ 0 & & \end{pmatrix}\in L(H\otimes C^{2^{n-1}})$$

这一矩阵也称 Curto 矩阵(Curto[55])。

例 5.3 设 $A=(A_1,A_2)$，此时由 A 导出的 Koszul 复形为

$$0\longrightarrow H\xrightarrow{d_2}H\oplus H\xrightarrow{d_1}H\longrightarrow 0,$$

$d_2x=(-A_2x,A_1x)$，$d_1(x_1,x_2)=A_1x_1+A_2x_2$。$d_1$ 和 d_2^* 定义在 $H\otimes C^2=H\otimes H$ 上，我们依定义有

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^* & A_1^* \end{pmatrix}。$$

此外，对算子组 $I=(I,0,\cdots,0)$，显然有

$$\hat{I}=\begin{pmatrix} I & & 0 \\ & I & \\ 0 & & \ddots \\ & & & I \end{pmatrix},$$

今后简记为 I。

定理 5.4 (Curto [55]) 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 Hilbert 空间 H 上的交换的有界线性算子组，$\hat{A}$ 是由 A 导出的 Curto 算子，则 A 正则的充要条件是 $\hat{A}$ 可逆，亦即 A 正则的条件是 $l_k=$

$d_k^*d_k+d_{k+1}d_{k+1}^*$ 是可逆的，$k=0,1,\cdots,n$。

证　$\hat{A}$ 可逆等价于 $\hat{A}\hat{A}^*$ 可逆又等价 $l_k,(k=0,1,\cdots,n)$，可逆是显然的。我们只须证明后者。先证必要性。因为 $E_{-1}^*=0$，故 $d_0=0$。由于复形是正合的，d_1 是满射，因此 $d_1d_1^*$ 是可逆的，亦即 $l_0=d_0^*d_0+d_1d_1^*=d_1d_1^*$ 是可逆的。现用数学归纳法来证，若 $j\leqslant k$，l_j 是可逆的，欲证 l_{k+1} 也可逆。

首先，可证 $E_{k+1}^*(H,A)=\mathrm{Ker}d_{k+1}\oplus\mathrm{Im}d_{k+1}^*$。显然，$\mathrm{Ker}\,d_{k+1}\cap\mathrm{Im}d_{k+1}^*=\{0\}$。若 $b\in E_{k+1}^*$，则 $d_{k+1}b\in E_k^*$，因 l_k 是可逆的，l_k 必满射，即 $\mathrm{Im}l_k=E_k^*$。因此，存在 $c\in E_k^*$，使得 $d_{k+1}b=l_kc=(d_k^*d_k+d_{k+1}d_{k+1}^*)c$，两边作用 d_{k+1}^*，则由 $d_{k+1}^*d_k^*=0$，将有 $d_{k+1}^*d_{k+1}b=d_{k+1}^*d_{k+1}d_{k+1}^*c$。因此 $b-d_{k+1}^*c\in\mathrm{Ker}d_{k+1}^*d_{k+1}=\mathrm{Ker}d_{k+1}$。这得到 $b\in\mathrm{Ker}d_{k+1}+\mathrm{Im}d_{k+1}^*$。

其次，只需再证明 l_{k+1} 是满射就行了。这是因为 l_{k+1} 是一对一的。事实上，若 $l_{k+1}x=0$，则可知 $d_{k+1}x=0$ 和 $d_{k+2}^*x=0$。但 $\mathrm{Ker}d_{k+2}^*=\mathrm{Im}d_{k+1}^*$，故 $x\in\mathrm{Ker}d_{k+1}$ 和 $x\in\mathrm{Im}d_{k+1}^*$ 同时成立，这只能有 $x=0$，由逆算子定理即知 l_{k+1} 是可逆的，定理就证完。

下面来证 l_{k+1} 是满射，设 $b\in E_{k+1}^*$，由前面已证的分解，可知存在 $c\in\mathrm{Ker}d_{k+1}$，$d\in\mathrm{Im}d_{k+1}$，使 $b=c+d_{k+1}^*d$。这里要说明的是，本来只能知道 $d\in E_k^*$，但由于 l_{k-1} 已知可逆，$E_k^*=\mathrm{Ker}d_k\oplus\mathrm{Im}d_k^*$，$d_{k+1}^*d_k^*=0$，对 d_{k+1}^* 来说，$\mathrm{Im}d_k^*$ 是它的核，故 d 不妨取在 $\mathrm{Ker}\,d_k$ 之中，即 $\mathrm{Im}\,d_{k+1}$ 之中。因为 $c\in\mathrm{Ker}\,d_{k+1}$，正合性意味着 $c=d_{k+1}e$，于是 $b=d_{k+2}e+d_{k+1}^*d$。

由于 $d\in\mathrm{Im}d_{k+1}$，故 $d=d_{k+1}f$。用极分解知识，可得 $\mathrm{Im}d_k\subset\mathrm{Im}(d_{k+2}d_{k+2}^*)^{\frac{1}{2}}$，所以

$$d_{k+2}e=(d_{k+2}d_{k+2}^*)^{\frac{1}{2}}g,\quad g\in E_{k+1}^*。$$

据 E_{k+1}^* 的直和分解，可知存在 $g_1\in\mathrm{Ker}\,d_{k+1}$，$g_2\in E_k^*$，使得 $g=g_1+d_{k+1}^*g_2$。这时，由 $\mathrm{Ker}\,d_{k+1}=\mathrm{Im}\,d_{k+2}$，又知存在 $h\in E_{k+2}^*$，

使得 $g_1=d_{k+2}h\in \mathrm{Im}d_{k+2}\subset \mathrm{Im}(d_{k+2}d^*_{k+2})^{\frac{1}{2}}$，即存在 $m\in E^*_{k+1}$，有 $g_1=(d_{k+2}d^*_{k+2})^{\frac{1}{2}}m$。总之

$$g=(d_{k+2}d^*_{k+2})^{\frac{1}{2}}m+d^*_{k+1}g_2。$$

由上可知

$$\begin{aligned} b&=d_{k+2}e+d^*_{k+1}d \\ &=(d_{k+2}d^*_{k+2})^{\frac{1}{2}}g+d^*_{k+1}d_{k+1}f \\ &=d_{k+2}d^*_{k+2}m+(d_{k+2}d^*_{k+2})^{\frac{1}{2}}d^*_{k+1}g_2+d^*_{k+1}d_{k+1}f \\ &=d_{k+2}d^*_{k+2}m+d^*_{k+1}d^*_{k+1}f。\end{aligned}$$

现在我们再看，$m\in E^*_{k+1}$ 可以改进为 $m\in \mathrm{Ker}d_{k+1}$，理由与 d 的选取相同，$f\in E^*_{k+1}$ 也可以改进为 $f\in \mathrm{Im}\, d^*_{k+1}$，理由是类似的。这样一来，

$$d_{k+1}(m+f)=d^*_{k+1}d_{k+1}f+d_{k+2}d^*_{k+2}m=b,$$

这就证明了 l_{k+1} 是满射，必要性证毕。

现在来证充分性，若 $d_kb=0$，则 $l_kb=d_{k+1}d^*_{k+1}b$。由于 l_k 可逆，$b=l_k^{-1}d_{k+1}d^*_{k+1}b$。但 l_k 和 d^*_{k+1} 是可交换的（注意 $d^*_kd_k\,d_{k+1}d^*_{k+1}=d_{k+1}d^*_{k+1}d^*_kd_k$，这由该算子的自共轭性立刻推得。）这样一来 $b=d_{k+1}d^*_{k+1}l_k^{-1}b$，即 $b\in \mathrm{Im}d_{k+1}$，这表明 $\mathrm{Ker}d_k\subset \mathrm{Im}d_{k+1}$。由复形定义知 $\mathrm{Im}d_{k+1}\subset \mathrm{Ker}d_k$，于是 $\mathrm{Ker}d_k=\mathrm{Im}d_{k+1}$。充分性证毕。

Curto 算子及定理 5.4 是有力的工具，以后会经常用到，这里，还要给出今后经常使用的一个推论，我们也用定理的形式写出来。

定理 5.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是重可交换的 Hibert 空间上的线性有界算子组。记 $f=\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,*\}$。则 A 为正则的充要条件是对一切 f，$\sum_{i=1}^{n}A_i^{f(i)}(A_i^*)^{f(i)}$ 是可逆的。

证 通过直接计算可知 $l_k=d_k^*d_k+d_{k+1}d^*_{k+1}$ 是 $\binom{n}{k}$ 阶的对角线

矩阵块，对角线上诸元素恰是$\binom{n}{k}$个不同的元素$\sum_{i=1}^{n} A_i^{f(i)}(A_i^*)^{f(i)}$，其中$f$在$\{1, 2, \cdots, n\}$的$k$个元素上取值为$*$。这样一来，由$l_k$的可逆性等价于$\sum_{i=1}^{n} A_i^{f(i)}(A_i^*)^{f(i)}$的可逆性及定理5.4立即得结果。

§6 Taylor联合本质谱和指标

这一节将定义Taylor联合本质谱和指标的定义，并给出一些基本性质。

定义6.1 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是Banach空间X上的交换算子组，$E(X,A)$是A导出的Koszul复形，$\{d_k\}$是其边界算子。若对每个k，$\mathrm{Im}\, d_k$是闭的，而且$\dim(\mathrm{Ker} d_{2k}/\mathrm{Im} d_{2k-1})<\infty$或者$\dim(\mathrm{Ker} d_{2k+1}/\mathrm{Im} d_{2k})<\infty$，$K=0,1,\cdots$，则称$A$是半Fredholm算子组，$\sum(-1)^{k+1}\dim(\mathrm{Ker} d_k/\mathrm{Im} d_{k-1})$称为$A$的指标，记为$\mathrm{Ind}\, A$。特别地，若对每个$k$，均有$\dim(\mathrm{Ker} d_k/\mathrm{Im} d_{k-1})<\infty$，则称$A$为Fredholm算子组。记Fredholm算子组的全体为$\mathscr{F}$，则集合$\{(z_1,\cdots,z_n)\in C^n: (z_1-A_1,\cdots,z_n-A_n)\overline{\in}\mathscr{F}\}$称为$A$的联合本质谱，记为$S_{Pe}(A)$

注：由定义2.3，若以链复形(2.2)定义Taylor联合本质谱和指标，则$\mathrm{Ind}\, A=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\dim(\mathrm{Ker}\,\alpha_{n-k}/\mathrm{Im}\alpha_{n-k+1}) = (-1)^{n-1}\sum(-1)^k\dim(\mathrm{Ker}\alpha_k/\mathrm{Im}\alpha_{k+1})$。

若$A=(A_1,\cdots,A_n)$是Hilbert空间H上的算子组，A是交换的条件可改为本质交换的，即对任意$i\neq j$，$[A_i,A_j]$是紧算子。

定义6.2 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是Hilbert空间H上本质交换的算子组，利用Taylor边界算子可形式上导出下列系统：

$$0\longrightarrow E_n(H)\xrightarrow{d_n}E_{n-1}(H)\longrightarrow\cdots E_1(H)\xrightarrow{d_1}E_0(H)\longrightarrow 0$$

此时对任意 p，必有 $d_p \circ d_{p+1}$ 是紧算子，因此可自然诱出 Cakin 代数 $L(H)/K(H)$（记为 D）上的一个链复形

$$0 \longrightarrow E_n(D) \xrightarrow{\widehat{d}_n} E_{n-1}(D) \longrightarrow \cdots E_1(D) \xrightarrow{\widehat{d}_1} E_0(D) \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

若 * 正合，就称 A 为 Fredholm 算子组，而 $Sp_e(A)=\{(z_1,\cdots,z_n)\in C^n:(z_1-A_1,\cdots,z_n-A_n)$ 非 Fredholm 算子组$\}$，而当 $z\overline{\in}Sp_e(A)$ 时，$\mathrm{Ind}(\widehat{A-z})=\dim\mathrm{Ker}(\widehat{A-z})-\dim\mathrm{Ker}(\widehat{A-z})^*$ 称为 A 的指标，其中 $\widehat{A-z}$ 是 $A-z$ 的 Curto 矩阵。

对于 Hilbert 空间上的交换算子组，定义 6.1 与 6.2 形式上有出入，但是我们以下将证明二者实质上是一致的。

引理 6.3 [55] $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 Hilbert 空间 H 上交换算子组，A 是按定义 6.2 中的 Fredholm 算子组的充要条件是对任意 k，$l_k=\widehat{d}_k^*\widehat{d}_k+\widehat{d}_{k+1}\widehat{d}_{k+1}^*$ 是可逆时，即 $d_k^*d_k+d_{k+1}d_{k+1}^*$ 是(单个) Fredholm 算子。

证　与定理 5.4 的证明相同，只需作部分符号的变动，故略。

定理 6.4　设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 Hilbert 空间 H 上交换算子组，则 A 按定义 6.1 是 Fredholm 算子组的充要条件是 A 按定义 6.2 是 Fredholm 算子组，并且

$$\mathrm{Ind}\,\widehat{A}=\sum(-1)^{k+1}\dim(\mathrm{Ker}\,\widehat{d}_k\ominus\mathrm{Im}d_{k+1})。$$

证　设 A 按定义 6.2 是 Fredholm 算子组，则 $l_k=d_k^*d_k+d_{k+1}d_{k+1}^*$ 是 Fredholm 算子。又 $\mathrm{Im}d_{k+1}\subset\mathrm{Ker}d_k$，因此 $\mathrm{Im}l_k=\mathrm{Im}d_k^*d_k\oplus\mathrm{Im}d_{k+1}d_{k+1}^*$。但 $\mathrm{Im}d_k$ 是闭的，于是 $\mathrm{Im}\,d_k^*d_k$ 是闭的，从而知 $\mathrm{Im}d_k$ 是闭的。因此 $\{d_k\}$ 都具有闭值域。又 $\mathrm{Ker}l_k=\mathrm{Ker}d_k\cap\mathrm{Ker}d_{k+1}^*=(\mathrm{Ker}d_k)\ominus(\mathrm{Im}d_{k+1})$，得到 $\dim(\mathrm{Ker}D_k\ominus\mathrm{Im}d_{k+1})<\infty$，于是 A 按定义 6.1 是 Fredholm 算子组。

又若 A 按定义 6.1 是 Fredholm 算子组，则由 $\mathrm{Im}l_k=\mathrm{Im}d_k^*d_k\oplus\mathrm{Im}d_{k+1}d_{k+1}^*$ 得到 l_k 具有闭值域。又 $\mathrm{Ker}\,l_k=\mathrm{Ker}\,d_k\ominus\mathrm{Im}\,d_{k+1}$ 知

$\dim\ \operatorname{Ker} l_k < \infty$，于是 l_k 是 Fredholm 算子。用引理 6.3 知 A 按定义 6.2 是 Fredholm 算子组。

由于 $\qquad \operatorname{Ker}\hat{A} = \operatorname{Ker}\hat{A}^*\hat{A} = \oplus \operatorname{Ker}(d_{2k-1}^* d_{2k-1} + d_{2k} d_{2k}^*)$，

$\qquad\qquad \operatorname{Ker}\hat{A}^* = \operatorname{Ker}\hat{A}\hat{A}^* = \oplus \operatorname{Ker}(d_{2k}^* d_{2k} + d_{2k+1} d_{2k+1}^*)$，

于是

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\hat{A} &= \dim\ \operatorname{Ker}\hat{A} - \dim\ \operatorname{Ker}\hat{A}^* \\ &= \sum \dim\ \operatorname{Ker}(d_{2k-1}^* d_{2k-1} + d_{2k} d_{2k}^*) \\ &\quad - \sum \dim\ \operatorname{Ker}(d_{2k}^* d_{2k} + d_{2k+1} d_{2k+1}^*) \\ &= \sum (-1)^{k+1} \dim(\operatorname{Ker} d_k \ominus \operatorname{Im} d_{k+1})。\end{aligned}$$

证毕。

推论 6.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 Hilber 空间 H 上重交换的算子组，则 A 是 Fredholm 算子组的充要条件是对一切 f $\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,*\}$，$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^{f(i)}(A_i^*)^{f(i)}$ 是 Fredholm 算子组，且此时 $\operatorname{Ind}A = \sum(-1)^{k+1}\sum\limits_{f\in I_k}\dim\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\operatorname{Ker} A_i^{f(i)}\right)$，其中 $I_k=\{f$：有 k 个 i 使 $f(i)=0\}$。

证　充要条件可由定理 5.5 得到。此时 $l_k = d_k^* d_k + d_{k+1} d_{k+1}^*$ 是对角线矩阵块，对角线上诸元素恰好是$\binom{n}{k}$个彼此不同的元素 $\sum\limits_{i=1}^{n}(A_i^*)^{f(i)}A_i^{f(i)}$，其中 $f\in I_k$，于是

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}A &= \sum(-1)^{k+1}\dim\operatorname{Ker}(d_k^* d_k + d_{k+1} d_{k+1}^*) \\ &= \sum(-1)^{k+1}\sum_{I_k}\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker} A_i^{f(i)}\right)，\end{aligned}$$

证毕。

§7 夏道行联合谱

迄今为止，我们都是讨论两两可交换的算子组的联合谱。1983 年，夏道行在［30］中提出了一种非交换算子组的联合谱概念。

定义 7.1 设 $K=(K_1,\cdots,K_n)$是 Hilbert 空间 H 上的交换自

共轭算子组，L 是H上任意的自共轭算子，记

$$D_j(L)=i(K_jL-LK_j)。$$

如果对任意的一组整数 $j_1,j_2,\cdots,j_m$，满足 $1\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_m\leqslant n$，均有 $D_{j_1}(L)\cdot D_{j_2}(L)\cdots\cdot D_{j_m}(L)\geqslant 0$，则称$(n+1)$个算子组$(K_1,\cdots K_n,L)$是亚正常算子组，记为 $L\in HN(H)$。

定义 7.2 设 K 是交换自共轭算子组，$L\in HN(H)$，$(K_1,\cdots,K_n,L)$ 的夏道行联合谱 $\sigma_x(H,L)$是指：

$$\sigma_x(K,L)=\{(x_1,\cdots,x_n,y):(x_1,\cdots,x_n)\in S_p(K),\\ y\in\bigcap_{\Delta\in P(x)}\sigma(E(\Delta)L|_{E(\Delta)H})\},$$

其中 $\Delta=\Delta_1\times\cdots\times\Delta_n$，$P(x)=\{\Delta\subset R^n$：$x_j\in\Delta_j$，$\Delta_j$ 是区间，$j=1,2,\cdots,n\}$，$E(\Delta)=E^1(\Delta_1)E^2(\Delta_2)\cdots E^n(\Delta_n)$，$E^j$ 是 K_j 的谱测度，$j=1,2,\cdots,n$。

当 L 与每个 K_j 都可交换，即 $D_j(L)=0(j=1,2,\cdots,n)$ 时，$\sigma_x(H,L)$和 $S_p((H_1,\cdots,H_n,L))$是相同的。实际上，由第三章定理1.2 对自共轭算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 来说，$S_p(A)=\mathrm{Supp}E$，这里 E 是 A_j 的谱测度 $E_j(j=1,2,\cdots,n)$所形成的乘积谱测度，Supp 表示测度的支集。因此，自共轭算子组的联合谱都是联合近似点谱。再由联合谱的投影性质即知此时的夏道行谱和 Taylor 联合谱是一致的。

夏道行联合谱对于研究亚正常算子组是一个有力的工具。设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$由 n 个重交换的亚正常算子所构成，记 $T_j=K_j+iJ_j$，其中 K_j 和 T_j 均为自共轭算子，由重交换条件知 $K_iK_j=K_jK_i$，且 $K_iJ_j=J_jK_i(i\neq j)$。但是 K_j 和 J_j 不必是可交换的，仅有 $i(K_jJ_j-J_jK_j)\geqslant 0$。这说明$(K_1,\cdots,K_n,J_j)$是一个非交换的自共轭算子组且 $J_j\in HN(K)$。因而 $\sigma_x(K,J_j)$就可以定义了。

对于亚正常算子组联合谱的研究已有许多结果，夏道行及其学生们的工作是系统的（详见〔10〕、〔18〕、〔30〕）。

第三章　正常算子组

正常算子包括自共轭算子，是一类理论上和应用上比较广泛而且容易处理的一类算子。本章讨论有界的正常算子组，为后面的非正常算子组的讨论作准备。π_k 空间上的自共轭算子组虽然实质上是非正常算子组，由于某些方面具有正常算子组的性质，因此也列在本章内。

§1　正常算子组的 Taylor 谱

定理1.1　设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 Hilbert 空间 H 上变换的正常算子组，则 $S_p(A)=\sigma(A)=\sigma_\pi(A)$，这里从左到右分别为 A 的 Taylor 谱、Dash 谱和联合近似点谱。

证　由第二章我们已知有 $\sigma(A)\supset S_p(A)\supset\sigma_\pi(A)$，因此只须证 $\sigma_\pi(A)\subset\sigma(A)$。事实上若 $0=(0,\cdots,0)\overline{\in}\sigma_\pi(A)$，则必存在 $\alpha>0$，使得对任意 $x\in H$，有

$$\left\langle\sum_{i=1}^{n}A_i^*A_ix,x\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\|A_ix\|^2\geqslant\alpha\|x\|^2,$$

但 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i^*A_i$ 是正算子，所以由自共轭算子的知识可得出 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i^*A_i$ 可逆。现设$\mathscr{A}''$是由 $A=(A_1,\cdots,A_n)$生成的二次交换子代数，由 A 是交换的正常算子组和 Putnam-Fuglede 定理（见第一章），不难知道$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i^*A_i\right)^{-1}\in\mathscr{A}''$。令 $B_i=(\sum A_i^*A_i)^{-1}A_i^*,i=1,\cdots,n$。则 $B_i\in\mathscr{A}''$，且$\sum\limits_{i=1}^{n}B_iA_i=I$。这样就证得了 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是在

Dash 意义下正则的，由平移性得到$\sigma_\pi(A)\supset\sigma(A)$。证毕。

对于交换的正常算子组$A=(A_1,\cdots,A_n)$，记$E_i(z_i)$为由A_i导出的谱测度，$i=1,2,\cdots,n$，则存在唯一的C^n上的乘积谱测度$E(z)=\prod_{i=1}^n E_i(z_i)$，这时我们有下列定理：

定理1.2 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是 Hilbert 空间H上的交换的正常算子组，$E(z)$是由A导出的乘积谱测度，则有$S_p(A)=\text{Supp}\,E(z)$，(Supp)$E(z)$表示$E(z)$的支集)。$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_p(A)$当且仅当$E(\{\lambda\})\neq0$。

证　设$\Omega=S_p(A_1)\times\cdots\times S_p(A_n)\subset C^n$，则由谱积分可知

$I=\int_\Omega dE(z)$，$A_i=\int_\Omega z_i dE(z), i=1,2,\cdots,n$。

(1) $\text{Supp}E(z)\subset S_p(A)$

设$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\text{Supp}E(z)$，则对任意$\lambda$的邻域$U_\lambda$，必有$E(U_\lambda)\neq0$。现取一列邻域$\{U_\lambda^m\}_{m=1}^\infty$满足$\text{diam}\,(U_\lambda^m)\leqslant\frac{1}{m}$，这时可以取到一列单位向量$\{x_m\}_{m=1}^\infty$，$x_m\in E(U_\lambda^m)$，$m=1,2,\cdots$。从而有

$$\sum_{i=1}^n\|(A_i-\lambda_i)x_m\|^2=\sum_{i=1}^n\int_\Omega|z_i-\lambda_i|^2d\|E(z)x_m\|^2$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_{U_\lambda^m}|z_i-\lambda_i|^2d\|E(z)x_m\|^2\leqslant\frac{1}{m^2}\to0$$

$$(m\to\infty)。$$

因此$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_\pi(A)=S_p(A)$。

(2) $S_p(A)\subset\text{Supp}E(z)$

若$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\overline{\in}\text{Supp}\,E(z)$，则存在以$\lambda$为中心，$\varepsilon_0$为半径的球邻域$U_\lambda$使得$E(U_\lambda)=0$。这时

$$\sum_{i=1}^n\|(A_i-\lambda_i)x\|^2=\int_\Omega\sum_{i=1}^n|z_i-\lambda_i|^2d\|E(z)x\|^2$$

$$=\int_{\Omega\setminus U_\lambda}\sum_{i=1}^n|z_i-\lambda_i|^2d\|E(z)x\|^2\geqslant\varepsilon_0^2\|x\|^2,$$

所以 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\overline{\in}\sigma_{\pi}(A)=S_p(A)$。

(3) $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_p(A)$，则有 $x\neq 0$，使 $A_i x=\lambda_i x, i=1,2,\cdots,n$。因此 $x\in\bigcap_{i=1}^{n}E_i(\{\lambda_i\})H=E(\{\lambda\})H\neq 0$。反之亦然。

对于一般的交换算子组，Taylor 已给出了解析算子组演算与解析谱映照定理，但对于交换的正常算子组，我们有下面更好的结果。

定理 1.3 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是H上的交换的正常算子组，$\mathscr{F}$是 C^n 到C 的关于 A 的乘积谱测度本性有界的可测函数全体，则存在$\mathscr{F}$到 $L(H)$的算子演算 $h\to h(A)$，满足

(1) $1\to I$；$z_i\to A_i$，$i=1,2,\cdots,n$，

(2) $h_1 h_2\in\mathscr{F}$，$\alpha,\beta,\in C$，则

$$\alpha h_1+\beta h_2\to\alpha h_1(A)+\beta h_2(A)$$

$$h_1 h_2\to h_1(A)h_2(A);$$

(3) $h\in\mathscr{F}$，$\overline{h}\to h(A)^*$，

特别当 $f=(f_1,\cdots,f_m)$，其中 f_i 都是连续函数时，还成立着连续谱映照定理 $S_p(f(A))=f(S_p(A))$。

证 对于 $h\in\mathscr{F}$，可定义 $h(A)=\int hdE(z)$，注意到 $h(A)$ 还是正常算子。特别 $f(A)=(f_1(A),\cdots,f_m(A))$ 还是交换的，可参考单个算子不难给出全部证明，详细证明略。

例 1.4 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 Hilbert 空间 H 上的对角算子组，即存在 H 的一组标准正交基$\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，使得 $A_i e_\lambda=a_\lambda^i e_\lambda$，其中 $a_\lambda^i\in C, i=1,2,\cdots,n$。显然 A 是交换的正常算子组，容易计算出 $\sigma_p(A)=\{(a_\lambda^1,\cdots,a_\lambda^n);\lambda\in\Lambda\}$，$S_p(A)=\overline{\sigma_p(A)}$($\sigma_p(A)$在 C^n 中的闭包)。

推论 1.5 C^n中任意紧集都可是某个交换正常算子组的 Taylor谱。

§2 正常算子组的谱子空间

设 X 是 Banach 空间，U 为 C^n 中开集，$C^\infty(U,X)$ 表示定义在 U 上的关于 $z_1,\cdots,z_n$ 无限次可导的 X 值函数全体，$s=(s_1,\cdots,s_n)$ 为几个不定元组，$dz=(dz_1,\cdots,dz_n)$，$\wedge^p[s\cup dz,C^\infty(U,X)]$ 表示以 $s\cup dz$ 为不定元，$C^\infty(U,X)$ 为系数的 p 级外代数，定义 $\wedge^{n-1}[sUdz,C_\infty(U,X)]$ 到 $\wedge^n[s\cup dz,C^\infty(U,X)]$ 的算子 $\alpha\oplus\partial$ 如下：

设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是一组交换算子组，$\psi(z)\in\wedge^{n-1}(s\cup dz,C^\infty(U,X))$，则

$$((\alpha\oplus\partial)\psi)(z)$$
$$=[(A_1-z_1)s_1+\cdots+(A_n-z_n)s_n+\partial/\partial z_1+\cdots+\partial/\partial z_n]\wedge\psi(z)。$$

下面定义是单个算子情形的推广。

定义 2.1 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为 Banach 空间 X 上的交换算子组，δ 为 C^n 中的闭集，则

$X_A(\delta)=\{x\in X$，存在 $\psi\in\wedge^{n-1}(s\cup dz,C^\infty(C^n\backslash\delta))$，使得

$s_1\wedge\cdots\wedge s_n x=(\alpha\oplus\partial)\psi(\lambda)$，$\lambda\in C^n\backslash\delta\}$，

称为 A 的关于 δ 的谱子空间。

定理 2.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为 Hilbert 空间 H 上的交换的正常算子组，$E(\cdot)$ 为由 A 导出的乘积谱测度，则对 C^n 中任意闭集 δ，有

$$X_A(\delta)=\bigcap_{\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in C^n\backslash\delta}\left(\sum_{i=1}^n R(A_i-\lambda_i)\right)=E(\delta)H,$$

这里 $R(A_i-\lambda_i)$ 表示算子 $A_i-\lambda_i$ 的值域。

证 (1) $X_A(\delta)=\bigcap_{\lambda\in C^n\backslash\delta}\left(\sum_{i=1}^n R(A_i-\lambda_i)\right)$。

设 $x\in X_A(\delta)$，由定义存在 $\psi\in\wedge^{n-1}(s\cup dz,C^\infty(C^n\backslash\delta,X))$ 使得 $xs_1\wedge\cdots\wedge s_n=(\alpha+\partial)\psi(\lambda)$，$\lambda\in C^n\backslash\delta$。

设 ψ 在 $s_1\wedge\cdots\wedge\hat{s}_i\wedge\cdots\wedge s_n$ 项的系数为 ψ_i，$i=1,2,\cdots,n$。

这样 $x=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(A_i-\lambda_i)\psi_i(\lambda)\in\sum_{i=1}^{n}R(A_i-\lambda_i)$，$\lambda\in C^n\backslash\delta$。

(2) $\bigcap_{\lambda\in C^n\backslash\delta}\left(\sum_{i=1}^{n}R(A_i-\lambda_i)\right)\subset E(\delta)H$。

若 $x\in\sum_{i=1}^{n}R(A_i-\lambda_i)$，则存 $y_1\cdots,y_n\in H$，使得

$x=\sum_{i=1}^{n}(A_i-\lambda_i)y_i$，对固定的 $\lambda\in C^n\backslash\delta$ 成立。令 D_ξ 为 C^n 中以 λ 为中心，ξ 为半径的球，注意到这时

$$\|E(D_\xi)x\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{n}E(D_\xi)(A_i-\lambda_i)y_i\right\|^2$$

$$\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\|E(D_\xi)(A_i-\lambda_i)y_i\|^2$$

$$=n\int_{D_\xi}\sum_{i=1}^{n}|z_i-\lambda_i|^2d\|E(z)y_i\|^2$$

$$\leqslant\xi^2\ n\sum_{i=1}^{n}\|E(D_\xi)y_i\|^2,$$

所以 $\xi^{-2}\|E(D_\xi)x\|^2\to0(\xi\to\infty)$，进而 $\xi^{-2n}\|E(D_\xi)x\|^{2n}\to0$，即集函数 $\|E(\cdot)x\|^{2n}$ 在 $C^n\backslash\delta$ 上每一点 λ 的对称导数为 0，由集函数的性质知必有 $\|E(C^n\backslash\delta)x\|^{2n}=0$。这就证明了 $x\in E(\delta)H$。

(3) $E(\delta)H\subset X_A(\delta)$。

现在要找 $\psi\in\wedge^{n-1}(s\cup dz,C^\infty(C^n\backslash\delta)_0H))$ 使得

$(\alpha\oplus\bar{\partial})\psi(\lambda)=xs_1\wedge\cdots\wedge s_n$。

记 $\widetilde{A}_i=A_i|_{E(\delta)H}$，则对任意 $\lambda\bar{\in}\delta$，$\widetilde{A}-\lambda=(\widetilde{A}_1-\lambda_1,\cdots,\widetilde{A}_n-\lambda_n)$ 正则，即 $\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{A}_i-\lambda_i)^*(\widetilde{A}_i-\lambda_i)$ 可逆，记其逆为 $A(\lambda)^{-1}$，

$B_i(\lambda)=(\widetilde{A}_i-\lambda_i)A^{-1}(\lambda)$。$\beta$ 是 $\wedge^P[(s,C^\infty(C^n\backslash\delta,\ E(\delta)H))]$ 到

$\wedge^{p-1}(s,\ C^\infty(C^n\backslash\delta,\ E(\delta)H))$的映射：若 $\varphi s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_P}\in\wedge^P[s,$
$C^\infty(C^n\backslash\delta, E(\delta)H)]$，$(\beta\varphi)(\lambda)=\sum_{s=1}^{P}(-1)^{s-1}B_j^1(\lambda)\varphi(\lambda)s_{j_1}\wedge\cdots$
$\wedge\hat{s}_{j_s}\wedge\cdots\wedge s_{jp}$。由于 $\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{A_i}-\lambda_i)B_i(\lambda)=I(E(\delta)H$ 中恒等元)，则
若$\alpha\varphi=0$，令 $\varphi'=\beta\varphi_0$，则必有 $\alpha\varphi'=\varphi$（见 I 定理 4.1）。

任意 $\psi\in\wedge^{n-1}[s\cup dz,C^\infty(C^n\backslash\delta)_1H)]$，可以有 $\psi=\psi_{0,n-1}+\cdots+\psi_{n-1,0}$，其中 ψ_{ij} 中有 i 个$(dz_1,\cdots,dz_n)$中元，j 个$(s_1,\cdots,s_n)$中元。解方程$(\alpha\oplus\partial)\psi=xs_1\wedge\cdots\wedge s_n$ 等价于解

$$\alpha\psi_{0,n-1}=xs_1\wedge\cdots\wedge s_n,$$
$$\alpha\psi_{1,n-2}+\partial\psi_{0,n-1}=0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha\psi_{n-1,0}+\partial\psi_{n-2,1}=0,$$
$$\partial\psi_{n-1,0}=0,$$

由于 $\alpha(xs_1\wedge\cdots\wedge s_n)=0$，故令 $\psi_{0,n-1}=\beta(xs_1\wedge\cdots\wedge s_n)$，由以上分析知 $\alpha\psi_{0,n-1}=xs_1\wedge\cdots\wedge s_n$。

设 $\partial\psi_{0,n-1}=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i dz_i$，其中 $\varphi_i\in\wedge^{n-1}[s,C^\infty(C^n\backslash\delta,E(\delta)H)]$，由于$\alpha_0\partial=-\partial_0\alpha$，于是 $\alpha(\partial\psi_{0,n-1})=-\partial(\alpha\psi_{0,n-1})=-\partial(xs_1\wedge\cdots\wedge s_n)=0$，即 $\alpha\psi_i=0$，$i=1,2,\cdots,n$。令 $\psi_i=\beta\psi_i$，$i=1,2,\cdots,n$，必有 $\alpha(\sum\psi_i dz_i)=\sum\alpha\psi_i dz_i=\sum\psi_i dz_i=\partial\psi_{0,n-1}$。令 $\psi_{1,n-2}=-\sum\psi_i dz_i$，于是第二个方程亦有解。

逐步解出 $\psi_{i,j}$，最后得到 $\psi_{n-1,0}\in\wedge^{n-1}(s,C^\infty(C^n\backslash\delta),E(\delta)H)$，使 $\alpha\psi_{n-1,0}+\partial\psi_{n-1,2}=0$，只要证明 $\partial\psi_{n-1,0}=0$ 就可以了。在等式 $\alpha\psi_{n-1,0}+\partial\psi_{n-1,2}=0$ 二边作用 ∂，注意到 $\partial\cdot\partial=0$，得到 $\alpha\cdot\partial\psi_{n-1,0}=0$。但 $\partial\psi_{n-1,0}$ 的系数都取值于 $E(\delta)H$，而 α 在 $E(\delta)H$ 中正则，必有 $\partial\psi_{n-1,0}=0$。证毕。

§3 正常算子组的联合数值域和联合范数

设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 Hilbert 空间 H 上的线性算子组，定义

$$\|A\|=\sup\{(\|A_1x\|^2+\cdots+\|A_nx\|^2)^{\frac{1}{2}}:x\in H,\|x\|=1\},$$

$$W(A)=\{(\langle A_1x,x\rangle,\langle A_2x,x\rangle,\cdots,\langle A_nx,x\rangle):x\in H,\|x\|=1\},$$

$$w(A)=\sup\{(|\langle A_1x,x\rangle|^2+\cdots+|\langle A_nx,x\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}:x\in H,\|x\|=1\},$$

这些记号分别称为 A 的联合范数，联合数值域和联合数值域半径。若 A 还是交换算子组，则还可类似地定义 A 的 Taylor 联合谱半径 $r_{sp}(A)$。当 $\|A\|=w(A)$时，算子组 A 称为联合达范的(joint normaloid)。

多个算子组的联合数值域不必是凸集，据作者所知，目前只证明了交换的正常算子组、次正常算子组、重交换的亚正常算子组和 Toeplitz 算子组的联合数值域是凸集。下面先给出引理，读者不妨自行证明。

引理 3.1 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，则存在某个测度空间(X,u)和一组有界可测函数 $\phi_1,\cdots,\phi_n$属于$L^\infty(X,u)$，使得A_i 酉等价于$L^2(X,u)$上的由ϕ_i导出的乘法算子，$i=1,2,\cdots,n$。

定理 3.2 设 $A=(A_1\cdots A_n)$是交换的正常算子组，则 $W(A)$ 是 C^n 中的凸子集。

证　由引理 3.1，我们可不妨考虑 A 的函数模型。

设 $f,g\in L^2(X,u)$，$\|f\|=\|g\|=1$，则对任意 $t\in[0,1]$，容易验证 $h_t=(t|f|^2+(1-t)|g|^2)^{1/2}\in L^2(X,u)$，而且 $\|h_t\|=1$。因此

$$t(\langle A_1f,f\rangle,\cdots,\langle A_nf,f\rangle)+(1-t)(\langle A_1g,g\rangle,\cdots,\langle A_ng,g\rangle)$$

$$=(t\int\phi_1|f|^2du,\cdots,t\int\phi_n|f|^2du+\Big((1-t)\int\phi_1|g|^2du,\cdots,(1-t)$$

$$\times\int\phi_n|g|^2du\Big)$$

$$=(\langle A_1h_t,h_t\rangle,\cdots,\langle A_nh_t,h_t\rangle)\in W(A)。$$

定理 3.3 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，则有 $\|A\|=\omega(A)=r_{sp}(A)$，因此 A 是联合达范的。

证 由于 $S_p(A)=\sigma_\pi(A)$，易知 $\|A\|\geqslant\omega(A)\geqslant r_{sp}(A)$。由定理1.1和引理 3.1 还可以知道

$$S_p(A)=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n：对任意\ \varepsilon>0,$$

$$u(\{t\in X:\sum^n|\phi_i(t)-z_i|<\varepsilon)>0\}$$

于是 $u(\{t\in X:\sum|\phi_i(t)|^2>r_{sp}(A)^2\})=0$。这样 $\sum\limits_{i=1}^{n}\|A_if\|^2$

$$=\int\sum^n|\phi_i(t)|^2|f(t)|^2du\leqslant r_{sp}(A)^2\|f\|^2。$$

因此 $\|A\|=\sup\left\{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\|A_if\|^2\right)^{\frac{1}{2}}:\ \|f\|=1\right\}\leqslant r_{sp}(A)$。

设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 H 上的算子组，$C^*(A)$ 是由 A 生成的 $L(H)$ 中有单位元的 C^* 子代数。现在我们考虑 A 是交换正常算子组的情形。

引理 3.4 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，$C^*(A)$ 是由 A 生成的有单位元的 C^* 子代数，则有

$$S_p(A)=\{(\phi(A_1),\cdots,\phi(A_n)):\phi 是 C^*(A) 上的可乘线性泛函\}。$$

证 由定理 1.1 易知，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A)$ 的充要条件是 $I\overline{\in}C^*(A)(A_1-\lambda_1)+\cdots+C^*(A)(A_n-\lambda_n)$。注意到此时右边必含在 $C^*(A)$ 的某极大理想中，从而得证。

我们知道，对于 C^* 代数，它的态全体 $\sum$ 是一个 W^* 紧凸集，而这个集合的端点就称为纯态，对算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$，$\sum$ 是 $C^*(A)$ 的态空间，可引入下面代数型的联合数值域：

$$V(A)=\{(\psi(A_1),\cdots,\psi(A_n)):\psi\in\sum\}。$$

显然 $V(A)$ 是 C^n 中的紧凸集。

定理 3.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，则有

$$\mathrm{Conv}S_p(A)=\overline{W(A)}=V(A)。$$

证 由于 $S_p(A)=\sigma_\pi(A)$ 和 $W(A)$ 凸，我们有 $\mathrm{Conv}S_p(A)\subset\overline{W(A)}$ 又对每个 $x\in H$，可确定一个向量态：$T\in C^*(A), T\to\langle Tx, x\rangle$，所以 $W(A)\subset V(A)$。设 $\lambda=(\lambda_1\cdots,\lambda_n)$ 为 $V(A)$ 的任何一个端点，从定义知必存在 $C^*(A)$ 上的一个纯态 ϕ，使得 $\phi(A_i)=\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$。由于 A 是交换正常的，因此 $C^*(A)$ 是交换的，据 C^* 代数理论，此 ϕ 必是 $C^*(A)$ 上的可乘线性泛函，因此由引理 3.4 可知 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A)$。再由 Klein-Milman 的端点定理得到 $V(A)\subset\mathrm{Conv}S_p(A))$。证毕。

§4 Π_k 空间上自共轭算子组的联合谱

由于严绍宗系统的工作，π_k 空间上的算子尤其是自共轭算子的谱的研究，取得了完整的结果。这一节我们把这些结果推广到几个交换的自共轭算子组的情况。本节中涉及 π_k 空间上的算子的基础知识，请参阅夏道行、严绍宗的专著[24]。

引理 4.1 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是 Banach 空间 X 上的交换有界线性算子组，并且在直和分解 $X=X_1+X_2$ 之下，

$$T_j=\begin{pmatrix}A_j & B_j\\ 0 & C_j\end{pmatrix},\ j=1,\cdots,n,\ \text{则 } A=(A_1,\cdots,A_n)\ \text{和}$$

$$C=(C_1,\cdots,C_n)$$

都是交换算子组，并且 $S_p(T)\subset S_p(A)\cup S_p(C)$。

证 只要证明 $0\overline{\in}S_p(A)\cap S_p(C)$ 时，必有 $0\overline{\in}S_p(T)$。设 $\varphi\in\mathrm{Ker}\,d^p$，$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$，其中 $\varphi_j\in\wedge^p[s_1,\cdots,s_n;X_j], j=1,2$。由于 $(\sum T_js_j)\varphi=0$ 可得 $(\sum C_js_j)\varphi_2=0$，$(\sum A_js_j)\varphi_1+(\sum B_js_j)\varphi_2=0$。但 $O\overline{\in}S_p(C)$，故有 $\psi_2\in\wedge^{p-1}[s_1,\cdots,s_n;X_2]$ 使 $(\sum C_js_j)\psi_2=\varphi_2$。

这样 $(\sum B_j s_j)\varphi_2=(\sum B_j s_j)(\sum C_j s_j)\psi_2=-(\sum A_j s_j)(\sum B_j s_j)\psi_2$，其中最后一等号是由于 T_i 与 T_j 交换性得到的 $A_iB_j-B_jA_i=B_jC_i-C_iB_j$。于是 $(\sum A_i s_j)\varphi_1+(\sum B_j s_j)\varphi_2=(\sum A_j s_j)(\varphi_1-(\sum B_j s_j)\psi_2)$。

但 $0\overline{\in}S_p(A)$，于是又有 $\psi_1\in\wedge^{p-1}[s_1,\cdots,s_n;X_1]$，使 $(\sum A_j s_j)\psi_1=\varphi_1-(\sum B_j s_j)\psi_2$。这样 $(\sum T_i s_j)(\psi_1+\psi_2)=(\sum A_j s_j)\psi_1+(\sum B_j s_j)\psi_2+(\sum C_j s_i)\psi_2=\varphi_1+\varphi_2=\varphi$。由联合谱的定义得 $0\overline{\in}S_p(T)$。证毕。

命题 4.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 π_k 空间 H 上交换的自共轭算子组，并且在共同的标准分解 $H=N\oplus(Z+Z^*)\oplus P$ 之下，

$$A_j=\begin{pmatrix} S_j & F_j & G_j & Q_j \\ & A_{N_j} & & -F_j^* \\ & & A_{p_j} & G_j^* \\ & & & S_j^* \end{pmatrix},\quad j=1,\cdots,n。$$

则 $S_p(A)=S_{p_\pi}(A)=S_p(S)\cup S_p(A_N)\cup S_p(A_p)\cup S_p(S^*)$。

证 由引理 4.1，$S_p(A)\subset S_p(S)\cup S_p(A_N)\cup S_p(A_p)\cup S_p(S^*)$。要证反向的包含关系。

(1) Z 是 A 的公共不变子空间，且是有限维的，因此 $S_p(S)=\sigma_\pi(S)\subset\sigma_\pi(A)\subset S_p(A)$。

(2) 若 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A_N)\backslash S_p(S)$。由于 N 也是有限维的，必有 $n\in N$，使 $(A_{Nj}-\lambda_j)n=0$，$j=1,\cdots,n$。但 A_i 与 A_j 可以交换，经计算知 $(s_i-\lambda_i)F_j+F_i(A_{N_j}-\lambda_j)=(s_j-\lambda_j)F_i+F_j(A_{N_i}-\lambda_i)$，这样若 $i\neq j$，$(s_i-\lambda_i)F_jn=(s_j-\lambda_j)F_in$。由于 $\lambda\in S_p(A_N)$，必有 $z\in Z$，使 $F_jn=(s_j-\lambda_j)z$，$j=1,\cdots,n$。这样 $z-n\neq0$，使 $(A_j-\lambda_j)(z-n)=0$，即 λ 是 A 的联合特征值。

(3) 同样可利用 $Z\oplus P$ 是 A 的不变子空间得到 $S_p(A_p)\subset\sigma_\pi^-(A)\subset S_p(A)$。

事实上，若 $\lambda\in S_p(A_p)\backslash S_p(S)$，必有 $f_k\in P$，$\|f_k\|=1$，$k=$

$1,2,\cdots$，使 $(A_{p\,j}-\lambda_j)f_k\to 0, j=1,\cdots,n$。但 G_j 是有限秩算子，可不妨设 $G_jf_k\to f_j^*$。由 $(s_j-\lambda_j)G_j+G_i(A_{p\,j}-\lambda_j)=(s_j-\lambda_j)G_i+G_j(A_{p\,i}-\lambda_i)$，两边同时作用 f_k，令 $k\to\infty$ 得 $(s_i-\lambda_i)f_j^*=(s_j-\lambda_j)f_i^*$。但 $\lambda\overline{\in}S_p(S)$，必有 $z\in Z$，使 $(s_j-\lambda_j)z=f_j^*$。这样 $(A_j-\lambda_j)(z-f_k)=(s_j-\lambda_j)z-G_jf_k-(A_{p\,j}-\lambda_j)f_k\to(s_j-\lambda_j)z-f_j^*=0$。但 $\|z+f_k\|\geqslant\|f_k\|=1$，故 $\lambda\in\sigma_\pi(A)$。

(4) 若 $\lambda\in S_p(S^*)\subset(S_p(S)\cup S_p(A_p)\cup S_p(A_N))$，则有 $z^*\in Z^*$，使 $(S_j^*-\lambda_j)z^*=0$。由 $A_iA_jz^*=A_jA_iz^*$ 得

$$\begin{pmatrix}s_i-\lambda_i & F_i & G_i\\ 0 & A_{N\,i}-\lambda_i & 0\\ 0 & 0 & A_{p\,i}-\lambda_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_jz^*\\ -F_j^*z^*\\ G_j^*z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_j-\lambda_j & F_j & G_j\\ 0 & A_{N\,j}-\lambda_j & 0\\ 0 & 0 & A_{p\,j}-\lambda_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_iz^*\\ -F_i^*z^*\\ G_i^*z^*\end{pmatrix},$$

因 $S_p\begin{pmatrix}S & F & G\\ 0 & A_N & 0\\ 0 & 0 & A_p\end{pmatrix}\subset S_p(S)\cup S_p(A_N)\cup S_p(A_N)$ 得 $\lambda\overline{\in}S_p\begin{pmatrix}S & F & G\\ 0 & A_N & 0\\ 0 & 0 & A_p\end{pmatrix}$，这样必有 $z\oplus n\oplus p\in Z\oplus N\oplus P$，使

$$\begin{pmatrix}s_j-\lambda_j & F_j & G_j\\ 0 & A_{N\,j}-\lambda_j & 0\\ 0 & 0 & A_{p\,j}-\lambda_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ n\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_jz^*\\ -F_j^*z^*\\ G_j^*z^*\end{pmatrix},\quad j=1,\cdots,n。$$

于是 $(A_j-\lambda_j)(z\oplus n\oplus p\oplus z^*)=0$，$j=1,\cdots,n$，即 $\lambda\in\sigma_\pi(A)\subset S_p(A)$。证毕。

如同单个算子一样，$\Phi_\lambda(A)=\{x;$ 存在 $k=(k_1,\cdots,k_n)$，使 $(A_i-\lambda_i)^{k_i}x=0$，$i=1,\cdots,n\}$。若 Φ_λ 是非正的子空间，则称 λ 为 A 的临界点。临界点的全体记为 $C(A)$。

命题 4.3 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 π_k 空间 H 上的交换的自共轭算子组，$S_p(A)\subset R^n$，则 λ 是 A 的临界点的充要条件是 $\lambda\in$

$S_p(A_N)\cup S_p(S)$。

证 与 $n=1$ 的证明类似，略。

命题 4.4 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 π_k 空间 H 上的交换的自共轭算子组，E_j 为 A_j 的谱系，则 E_i 与 E_j 是可以交换的。若有某 i_0，使$[a_{i_0},b_{i_0}]\cap C(A_{i_0})=\phi$，而其它 i，$(a_i,b_i)\cap C(A_i)=\{\lambda_i\}$ 或为空集，则 $E(a_1,b_1]\cdots E(a_n,b_n]H$ 为 H 上的正子空间，且

$$\sup\{\|E_{1(\alpha_1,\beta_1)}\cdots E_{n(\alpha_n,\beta_n)}\|;\lambda_i\in(\alpha_j,\beta_j),\ (\alpha_j,\beta_j)\subset(a_j,b_j),$$

$$j=1,\cdots,n\}<\infty。$$

证 $E_{i_0}(\alpha_0,\beta_0)H$ 为正子空间。由 E_i,E_j 的定义知 E_i 与 E_j 是交换的，于是 $E_1(\alpha_1,\beta_1]\cdots E_n(\alpha_n,\beta_n]H$ 亦为正子空间。而 $\|E_1(\alpha_1,\beta_1]\cdots E_n(\alpha_n,\beta_n]\|\leqslant\|E_{i_0}(\alpha_0,\beta_0]\|$ 知 $\sup\{\|E_1(\alpha_1,\beta_1]\cdots E_n(\alpha_n,\beta_n]\|\}<\infty$。证毕。

定理 4.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 π_k 空间上交换的自共轭算子组，则存在多参数的谱系 $E(t_1,\cdots t_n)$，至多在有限个点 $C(E)\subset C(A_1)\times\cdots\times C(A_n)$上无定义，满足

(1) $t>t'$ 时，$E_t\gtrsim E_{t'}$，

(2) $E_{(t_1,\dots,t_n)}\to0$，某 $t_j\to-\infty$；$E_{(t_1,\dots,t_n)}\to I$，$t_j\to+\infty$，$j=1,\cdots,n$。

(3) $t\overline{\in}C(E)$时，$t_n\to t$ 且 $t_n\to t$ 时 $E_{t_n}\to E_t$，$n\to\infty$。

其中收敛都是指强收敛。

证 当 $t_j\overline{\in}C(A_j)$，$j=1,\cdots,n$ 时定义 $E_t=E_1(-\infty,t_1]\cdots E_n(-\infty,t_n]$，当其中有某$i$，$t_i\in C(A_i)$ 时，则考虑$\sup\{\|E_{t'}\|,t'<t\}$。若上确界有限时，则由[24]知 $\lim\limits_{t'\to t}E_{t'}$ 存在，定义 $E_t=\lim\limits_{t'\to t}E_{t'}$。由定义及命题 4.4 直接验证 (1)、(2)、(3) 满足，且$C(E)\subset C(A_1)\times\cdots\times C(A_n)$。证毕。

引理 4.6 A 如定理 4.5。若开集 $G\subset R^n$，且 $\mathrm{Bd}(G)\cap C(E)=\phi$，则必有投影算子 $E(G)$，使 $E(G)H$ 为 A 的不变子空间，

并且$S_p(A|E(G)H)\subset G$。

证 G分解为$\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_1^k,b_1^k]\times\cdots\times(a_n^k,b_n^k]$，且每个$(a_i^k,b_i^k]$中至多有一点在$C(A_j)$中。定义$E(G)=\sum_{k=1}^{\infty}E_1(a_1^k,b_1^k]\cdots E_n(a_n^k,b_n^k]$。易证这样的和形是强收敛的，且不依赖于$G$的分解。

$E_k=E_1(a_1^k b_1^k]\cdots E_n(a_n^k,b_n^k]H$是$A$的不变子空间。对任意$N$，$S_p\left(A\ \middle|\ \sum_{k=1}^{N}E_k\right)\subset\bigcup_{k=1}^{N}S_p(A|E_k)\subset\bigcup_{k=1}^{N}(a_1^k,b_1^k]\times\cdots\times(a_n^k,b_n^k]$。取$N$充分大，使得任意$k>N$，$E_k$是正子空间，$A$在$E_k$上是Hilbert空间上的自共轭算子，于是

$$S_p\left(A\ \middle|\ \sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)\subset S_p\left(A\ \middle|\ \sum_{k=1}^{N}E_k\right)\cup S_p\left(A\ \middle|\ \sum_{k=N+1}^{\infty}E_k\right)$$

$$\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_1^k,b_1^k]\times\cdots\times(a_n^k,b_n^k]=\overline{G}。$$

定理 4.7 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是π_k空间H上的交换自共轭算子组，则对任意$\{G_m\}_{m=1}^{k}$是C^n的开复盖，有$H_i,i=1,\cdots,k$是A的不变子空间，使得$S_p(A|H_i)\subset G_i,i=1,\cdots,k$。

证 设$\bigcup_{m=1}^{k}G_m=C^n$，找开集D_m，使$D_m\subset\overline{D}_m\subset G_m$，

且$\mathrm{Bd}(D_m)\cap C(A)=\phi$，且$\bigcup_{m=1}^{k}D_m=C^n$，找分割$R^n=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_1^k,b_1^k]\times\cdots\times(a_n^k,b_n^k]$使对每个$k$，$(a_1^k,b_1^k]\times\cdots\times(a_n^k,b_n^k]$完全落到某$D_m$中，且$a_i^k$，$b_i^k\in C(A_i)$，$i=1,\cdots,n;k=1,2,\cdots$。

由$H=E(R^n)H=\sum_{k=1}^{\infty}E_1(a_1^k,b_1^k]\times\cdots\times E_n(a_n^k,b_n^k]H\subset\sum_{m=1}^{k}E(D_m)H=H$。令$H_m=E(D_m)H$，则$S_p(A|H_m)\subset\overline{D}_m\subset G_m,m=1,\cdots,k$。证毕。

§5 联合谱与多参数系统

本节将简要地介绍来自微分方程领域的多参数系统理论的某些内容，从而看到运用多个算子谱论研究的一个实例。在Sleeman[105]中，读者可以看到更详细的材料。

经典的 Sturm–Liouville 问题如下

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=\lambda p(x)y,\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{5.1}$$

这里 $p(x),q(x)$ 是 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的连续的实值函数，要求解 $y(x)$ 满足齐次条件：

$$\cos\alpha y(0)-\sin\beta\frac{dy}{dx}(0)=0,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\pi,$$

$$\cos\beta y(1)-\sin\beta\frac{dy}{dx}(1)=0,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi,$$

如果 $p(x)>0$，则称这问题是"右定"的。

如果 $p(x)\neq 0$，$q(x)>0$，则称这问题是"左定"的。

对于上述两种情况，都可用 Hilbert 空间上的单个算子谱论进行有效的讨论，特别是证明了存在完备的特征函数系（关于某个 Hilbert 空间）。

Sleeman 在[105]中将单参数方程(5.1)推广到 n 个参数 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 耦合在一起的微分方程组

$$-\frac{d^2y_i(x_i)}{dx_i^2}+q_i(x_i)y_i(x_i)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_{ij}(x_i)y_i(x_i)=0,$$

$$i=1,2,\cdots,n, \tag{5.2}$$

这里 $-\infty<a_i\leqslant x_i\leqslant b_i<\infty$，$a_{ij}(x_i)\in C[a_i,b_i]$，$q_i(x_i)\in C[a_i,b_i]$，$i,j=1,2\cdots,n$。现在问题是要确定这样的参数 λ，使方程组(4.2)有非平凡的一组解 $\{y_i(x_i,\lambda)\}_{i=1}^n$ 满足下列齐次边界条件：

$$y_i(a_i)\cos\alpha_i - y'_i(a_i)\sin\alpha_i = 0,\ 0 \leqslant \alpha_i < \pi,$$
$$y_i(b_i)\cos\beta_i - y'_i(b_i)\sin\beta_i = 0,\ 0 < \beta_i \leqslant \pi。\qquad (5.3)$$

如果这种解存在，则称 λ 为系统(5.2)、(5.3) 的特征值，而 $\prod_{i=1}^{n} y_i(x_i,\lambda)$ 称为这个系统对应 λ 的特征函数。这种多参数系统有很实际的背景。例如考虑椭圆型薄膜在固定边界下的振动，其中每个都含有两个相同的谱参数，这就是典型的双参数系统。

系统(5.2)、(5.3)中 a_{ij}, q_i 均是实值，在 $I_n = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 上，如果 $\det\{a_{ij}(x_i)\}_{i,j=1}^{n} > 0$，则称系统是右定的。如果 $\det\{a_{ij}(x_i)\}_{i,j=1}^{n} \neq 0$，且存在这样一组实数 $u_1,\cdots,u_n$，使得

$$\begin{vmatrix} u_1, & \cdots, & u_n \\ a_{21}, & \cdots, & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,\ \cdots,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ u_1 & \cdots & u_n \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,\ \cdots,$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ u_1 & \cdots & u_n \end{vmatrix} > 0$$

则称系统是左定的。

现在用泛函分析方法来描述这个系统。令 $H_i = L^2[a_i,b_i]$，定

义对称算子 S_{ij}: $H_i \to H_i$ 为 $S_{ij}f_i(x_i)=a_{ij}(x_i)f_i(x_i)$。定义自共轭的 Sturm-Liouville 算子 $A_i=\frac{d^2}{dx_i^2}-q_i(x_i)$。

定理 5.1 系统（5.2)、(5.3）在右定情况下、它的特征函数关于张量积空间 $H=\bigotimes_{i=1}^{n}L^2[a_i,b_i]$ 上的权函数 $\det\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ 形成一个完备正交集。

由于篇幅关系，我们下面只扼要地介绍在有界右定情况下关于多参数系统的一些泛函分析处理方法。

设 $A_i,S_{ij}:H_i\to H_i$ 是可分 Hilbert 空间 H_i 上的自共轭算子 $i,j=1,2,\cdots,n$。$H=\bigotimes_{i=1}^{n}H_i$。考虑多参数系统 $\{A_i,S_{ij},\lambda\}$ 的所谓的齐次特征问题：寻找系统的特征值 $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，使得存在对应的非零分解向量 $u=u_1\otimes\cdots\otimes u_n\in H$ 满足：

（$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是给定的一组实数）

$$\sum_{n=0}^{n}a_i\lambda_i=1$$

和 $$-\lambda_0A_iu_i+\sum_{j=1}^{n}\lambda_jS_{ij}u_i=0,\quad i=1,2,\cdots n。$$

由 A_i、S_{ij} 可导出 H 上的有界算子 A_i^+、S_{ij}^+ 如下：

设分解向量 $u=u_1\otimes\cdots\otimes u_n\in H$，定义 $A_i^+u=u_1\otimes\cdots\otimes A_iu_i\otimes\cdots\otimes u_n$，然后再延拓到整个 H，S_{ij}^+ 也类似定义，$i,j=1,2,\cdots,n$。注意到这时 $i\neq j$ 时，S_{ik}^+、A_{ik}^+ 与 S_{jk}^+、A_j 都可交换，定义行列式算子

$$A=\det\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ -A_1^+ & S_{11}^+ & \cdots & S_{1n}^+ \\ \vdots & & & \\ -A_n^+ & S_{n1}^+ & \cdots & S_{nn}^+ \end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{n}a_i\Delta_i, \tag{4.5}$$

其中 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_n$ 是按第一行展开的代数余子式。我们还假定

系统满足右定条件，即存在常数 $c>0$，使对任意 $f\in H$，都成立 $\langle Af,f\rangle\geqslant c\|f\|^2$。

现在我们不加证明给出两个引理。

引理 5.2 设 $\{T_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ 是Hilbert空间 H 上的一族有界自共轭算子，满足 $i\neq j$ 时，T_{ik} 与 T_{jh} 是交换的。设 $T=\det(T_{ij})$ 满足正定条件：即有常数C,$T\geqslant C$。则对任意$f_1,\cdots f_n\in H$,下列线性系统

$$\sum_{j=1}^{n} T_{ij}u_j=f_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

存在唯一的解可由 Gramer 法则给出解

$$u_j=T^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{T_{ij}}\, f_i\right),\quad j=1,2,\cdots,n。$$

其中 $\widehat{T_{ij}}$ 是 $\det(T_{ij})$中关于 T_{ij} 的代数余子式。

引理 5.3 设 A_i: $H_i\to H_i$，$i=1,2,\cdots,n$ 是有界线性算子，

则
$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(A_i^+)=\bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(A_i)。$$

为了用 $H=H_1\otimes\cdots\otimes H_n$ 上的一族算子刻划系统（5.4），我们考虑下面的诱导系统：

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i=f\quad (f,f_1,\cdots,f_n\in H),$$

$$-A_i^+f_0+\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^+ f_j=0,\quad i=1,2,\cdots,n。$$

注意到由引理 5.2，这个系统有唯一的解

$$f_i=A^{-1}\Delta_i f,\quad i=0,1,2,\cdots,n。$$

定义算子 $\Gamma_i=A^{-1}\Delta_i$，$i=0,1,\cdots,n$。

定理 5.4 $\lambda=(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)$为原系统（5.4）特征值的充要条件是 λ 为 $\Gamma=(\Gamma_0,\cdots,\Gamma_n)$的联合特征值。

证 从定义易知 $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\Gamma_i=I$ 和 $-A_i^+\Gamma_0+\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\Gamma_j=0$，$i=1,2,\cdots,n$。现设 λ 是 Γ 的联合特征值，则存在非零向量 $g\in H$，使得 $\Gamma_i g=\lambda_i g$，$i=0,1,\cdots,n$。这时

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda_i g = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \Gamma_i g = g,$$

$$-A_i^+ \lambda_0 g + \sum_{j=1}^{n} \lambda_i S_{ij}^+ g = \left(-A_i^+ \Gamma_0 + \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^+ \Gamma_j\right) g = 0,$$

因此有 $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda_i = 1$ 和

$$0 \neq g \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\left(-A_i \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_{ij}\right)^+$$

$$= \bigotimes_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\left(-A_i \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_{ij}\right) \text{（引理 5.3）。}$$

则必存在非零的分解向量 $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \in H$，使得

$$-\lambda_0 A_i u_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_{ij} u_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n,$$

即 λ 是系统（5.4）特征值。

反之，若存在 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 与非零向量 $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ 分别为系统（5.4)的特征值和特征向量，则

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda_i = 1 \text{ 且显然有}$$

$$-\lambda_0 A_i^+ u + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_{ij}^+ u = 0, \quad i = 1, \cdots, n。$$

由 Γ_i 的定义及引理 4.2 中的唯一性知：$\Gamma_i u = \lambda_i u, i = 0, 1, \cdots, n$。证毕。

下面我们证明 $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 关于权 A 是一组交换的自共轭算子。

由于 A 是 H 上的正定算子，所以 A 可以导出 H 上另外一个等价内积 $[\cdot, \cdot] = \langle A\cdot, \cdot\rangle$。关于这个新内积算子 L 的共轭算子为 $L^{\#}$。

定理 5.5 $\Gamma_i^{\#} = \Gamma_i$，$i = 0, 1, \cdots, n$。

证 显然 Δ_i 是原内积下的自共轭算子，因此对任意 $f, g \in H$ 和 $i = 0, 1, \cdots, n$，我们有

$$[\Gamma_i f,g]=[AA^{-1}\Gamma_i f,g]=\langle f,\Delta_i g\rangle$$
$$=\langle f,AA^{-1}\Delta_i g\rangle=\langle Af,\Gamma_i g\rangle=[f,\Gamma_i g]。$$

证毕。

定理 5.6 算子Γ_i, $i=0,1,\cdots,n$ 是两两交换的。

证 设 $i\neq j$, 观察下列矩阵

$$\begin{pmatrix}-A_1^+ & S_{11}^+ & \cdots & S_{1n}^+\\ \vdots & & & \\ -A_n^+ & S_{n1}^+ & \cdots & S_{nn}^-\end{pmatrix}。\tag{5.7}$$

记 Δ_{irj}, $r=1,2,\cdots,n$ 是 Δ_i 中按 (4.7) 的第 j 列元素展开的一列代数余方式，用 Δ_{irj} 作用于$\left(-A_r^+f_0+\sum_{j=1}^n S_{rj}^+f_j=0\right)$。$r=1,\cdots,n$，然后关于 r 相加，不难知道 $\Delta_i f_j-\Delta_j f_i=0$, $i,j=0,1,\cdots,n$。因为 $f_i=A^{-1}\Delta_i f$, $i=0,1,\cdots,n$, 所以有 $\Delta_i A^{-1}\Delta_j f=\Delta_j A^{-1}\Delta_i f$，这里的 $f\in H$ 是任意给定的。上面等式两边同时作用 A^{-1}，就得到 $\Gamma_i\Gamma_j f=\Gamma_j\Gamma_i f$。证毕。

设 $E_i(\cdot)$为Γ_i 的谱测度，Sleeman[105] 定义了乘积谱测度 $E(\cdot)=\prod_{i=0}^n E_i(\cdot)$的支集为系统 $\{A_i,S_{ij}\}$ 的谱。根据定理 1.2 可知，这即算子组 $\Gamma=(\Gamma_0,\cdots,\Gamma_n)$的 Taylor 联合谱。

推论 5.7 系统$\{A_i,S_{ij}\}$的特征值的每个分量都是实数。

证 这由定理 4.4 和 $\sigma_p(\Gamma)\subset S_p(\Gamma)$ 以及定理 5.5、定理 5.6 立即可得。

在结束本节之前，我们再介绍一个定理。

定理 5.8 对于上述系统 $\{A_i,S_{ij}\}$ 和参数 $\lambda=(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)\in C^{n+1}$，可以定义算子 $S_i(\lambda)$: $H_i\to H_i$ 为

$$S_i(\lambda)=-\lambda_0A_i+\sum_{j=1}^n\lambda_j S_{ij},\ i=1,2,\cdots,n\quad 则有$$

(1) λ 为系统的特征值，当且仅当 0 是每个 $S_i(\lambda)$的特征值。

(2) λ 属于系统的谱，当且仅当 0 属于每个 $S_i(\lambda)$的谱，而且

$\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i = 1$。

证 (1) 是显然的，现证 (2) 。

设 λ 属于系统的谱，则由定理 1.1 知，存在 H 上的一列单位向量 $\{f_m\}$ 使得 $\|(\Gamma_i - \lambda_i)f_m\| \to 0$ $(m\to\infty)$，$i=0,1,\cdots,n$。既然 $-A_i^+\Gamma_0 + \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^+ \Gamma_j = 0$ 和 $\sum_{i=1}^{n} a_i \Gamma_i = I$，因此易知 $\sum_{j=1}^{n} a_i \lambda_i = 1$ 和 $-\lambda_0 A_i^+ f_m + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_{ij}^+ f_m \to 0$，$i=1,\cdots,n$。因为 $S_p(S_i(\lambda)) = S_p(S_i^+(\lambda))$，所以 0 属于每个 $S_i(\lambda)$ 的谱。

反之设 0 属于每个 $S_i(\lambda)$ 的谱而且 $\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i = 1$，由于 $S_i(\lambda)$ 都是自共轭的，因而可找到一列单位向量 $\{f_m^i\} \in H_i$ 使得 $S_i(\lambda) f_m^i \to 0$ $(m\to\infty)$，$i=1,\cdots,n$。令 $f_m = f_m' \otimes \cdots \otimes f_m^n$，观察

$$\lambda_1 A f_m = \otimes \begin{vmatrix} a_0 & \lambda_1 a_1 & \cdots & a_n \\ -A_1 f_m' & \lambda_1 S_{n} f_m' & \cdots & S_{1n} f_m' \\ \vdots & & & \\ -A_n f_m^n & \lambda_1 S_{n1} f_m^1 & \cdots & S_{nn} f_m^n \end{vmatrix},$$

$$= \otimes \begin{vmatrix} a_0 & \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i & \cdots & a_n \\ -A_1 f_m^1 & S_1(\lambda) f_m^1 & \cdots & S_{1n} f_m^1 \\ \vdots & \vdots & & \\ -A_n f_m^n & S_n(\lambda) f_m^n & \cdots & S_{nn} f_m^n \end{vmatrix},$$

由此我们可以看出 $\lambda_1 A f_m - \Delta_1 f_m \to 0$，从而 $(\Gamma_1 - \lambda_1) f_m \to 0$。类似可证 $(\Gamma_i - \lambda_i) f_m \to 0$，$i=0,1,\cdots,n$。注意到 $\|f_m\| = 1$，因此 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为系统的谱。

从上面我们已看到，对于高维耦合参数的线性系统，多个算子谱论是一种适用的分析工具。

第四章　非正常算子组

本章主要是将单个亚正常算子的一些性质推广到重交换的亚正常算子组，最后还介绍重交换次正常算子组的一些谱性质。

§1　单个亚正常算子的一些性质

在这一节中，我们将介绍亚正常算子的部分性质和有关定义。由于篇幅关系，有些定理不作证明了。读者可参阅[19]、[7]等。

定理 1.1　设 $T=X+iY$ 是亚正常算子，记 $\sigma_\pi(X,Y)$ 和 $\sigma_p(X,Y)$ 分别为 T 的实、虚部的联合近似点谱和联合点谱，则有

$$\sigma_\pi(T)=\{x+iy,(x,y)\in\sigma_\pi(X,Y)\},$$

$$\sigma_p(T)=\{x+iy,(x,y)\in\sigma_p(X,Y)\}。$$

证明　设 $z=x+iy\in\sigma_\pi(T)$，则 $\exists\ \|f_n\|=1$，使 $\|(T-z)f_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$。但 $\|(T-z)^*f_n\|\leqslant\|(T-z)f_n\|$，从而有 $\|(T-z)^*f_n\|\to 0$。因此立即推得 $\|(X-x)f_n\|\to 0$ 和 $\|(Y-y)f_n\|\to 0$。反过来是显然的，这样就证得了第一个等式，第二个等式证明是类似的。证毕。

定理 1.2　设 $T=X+iy$ 是亚正常算子，则 $\sigma_\pi(T)$ 和 $S_p(T)$ 都具有直角投影性质：

$$\mathrm{Re}(\sigma_\pi(T))=\sigma_\pi(\mathrm{Re}T),\ \mathrm{Im}(\sigma_\pi(T))=\sigma_\pi(\mathrm{Im}T),$$

$$\mathrm{Re}(S_p(T))=S_p(\mathrm{Re}T),\ \mathrm{Im}(S_p(T))=S_p(\mathrm{Im}T)。$$

证　由定理 1.1 知，$\mathrm{Re}(\sigma_\pi(T))\subset\sigma_\pi(\mathrm{Re}T)$，$\mathrm{Im}(\sigma_\pi(T))\subset\sigma_\pi(\mathrm{Im}T)$。反之，设 $x_0\in\sigma_\pi(X)$，由 Berberian 技巧，可不妨设 $\mathrm{Ker}(X-x_0)\neq\{0\}$。现对任 $f\in\mathrm{Ker}(X-x_0)$，

$\langle i[(X-x_0)Y-Y(X-x_0)]f,f\rangle=0$。但由于$T-x_0$是亚正常，因此

$$i[(X-x_0)Y-Y(Y-x_0)]\geqslant 0,$$

所以$(X-x_0)Yf=Y(X-x_0)f$，即$\mathrm{Ker}(X-x_0)$约化Y从而约化T。显然$T|_{\mathrm{Ker}(X-x_0)}$是正常算子，由正常算子性质易知，存在$y_0\in R$，使$z_0=x_0+iy_0\in\sigma_\pi(T|_{\mathrm{Ker}(X-x_0)})$，从而有$z_0\in\sigma_\pi(T)$。这就证得了$\sigma_\pi(\mathrm{Re}T)\subset\mathrm{Re}(\sigma_\pi(T))$。同样，有$\sigma_\pi(\mathrm{Im}T)\subset\mathrm{Im}(\sigma_\pi(T))$。

由于单个算子的谱的边界均是近似点谱，因此有$\mathrm{Re}S_p(T)=\mathrm{Re}\sigma_\pi(T)=\sigma_\pi(\mathrm{Re}T)=S_p(\mathrm{Re}T)$。对于虚部同样有等式$\mathrm{Im}S_p(T)=S_p(\mathrm{Im}T)$。

定理 1.3 设T是亚正常算子，设$r\in S_p(T^*T)\cup S_p(TT^*)$，则存在点子$z\in S_p(T)$，使$|z|=\sqrt{r}$。

对于亚正常算子$T=X+iY$，可以引入T的记号算子

$$T_\pm=S-\lim_{t\to\pm\infty}e^{itX}Te^{-itX}。$$

定理 1.4 若T是亚正常算子，则$T_\pm$存在。这里$T_\pm$皆正常算子，且有$\mathrm{Im}T_-\leqslant\mathrm{Im}T\leqslant\mathrm{Im}T_+$。

证　由于$\frac{d}{dt}e^{itX}Ye^{-itX}=e^{itX}i(XY-YX)e^{-itX}\geqslant 0$，从而，

$e^{itX}Ye^{-itX}$为自轭的关于t的单调算子值函数，且显然有界，从而$S-\lim\limits_{t\to\pm\infty}e^{itX}Ye^{-itX}$存在，记为$Y_\pm$。从单调性立即知，$Y_-\leqslant Y\leqslant Y_+$。

对于任意$a>0$，有$e^{iaX}\cdot e^{itX}Ye^{-itX}=e^{i(a+t)X}Ye^{-i(a+t)}\cdot e^{iaX}$，令$t\to\pm\infty$，得$e^{iaX}Y_\pm=Y_\pm e^{iaX}$。两边对$a$求导并令$a=0$，就可推出$XY_\pm=Y_\pm X$，因此$T_\pm=X+iY_\pm$是正常算子。证毕。

定理 1.5 对于亚正常算子$T=X+iY$，有$S_p(T_\pm)\subset\sigma_\pi(T)$。

证　设$\lambda\overline{\in}\sigma_\pi(T)$，则存在$\varepsilon>0$，使

$$(T-\lambda)^*(T-\lambda)\geqslant\varepsilon I。$$

可以验证，这时必有$(T_{\pm}-\lambda)^*(T_{\pm}-\lambda)\geqslant\varepsilon I$。由于$T_{\pm}$皆正常，因此$\lambda\overline{\in}S_p(T_{\pm})$。证毕。

下面这个定理可查阅夏道行[19]。

定理 1.6 设$T=X+iY$为亚正常算子。$T_{\pm}=X+iY_{\pm}$为T的记号算子。记$T(k)=kT_{+}+(i-k)T_{-}$ $(0\leqslant k\leqslant 1)$，则

$$\bigcup_{0\leqslant k\leqslant 1} S_p(T(k))=S_p(T)。$$

设$T=X+iY$为亚正常算子，X有谱分解$X=\int xdE(x)$。任取x轴上区间Δ，令

$H_{\Delta}=E(\Delta)H$，$T_{\Delta}=E(\Delta)T|_{H(\Delta)}$，$D_{\Delta}=\{(x+iy)|x\in\Delta\}$。这时不难验证$T_{\Delta}$也是亚正常的，称它为$T$的由区间$\Delta$割出的部分。

下面是亚正常算子谱的直角分割定理。

定理 1.7 设$T=X+iY$是亚正常算子，Δ是非空区间，那么有

(1) $\sigma_p(T_{\Delta})=\sigma_p(T)\cap D_{\Delta}$；

(2) $S_p(T_{\Delta})\subset\overline{D}_{\Delta}$；

而且当Δ为开区间时，还有

(3) $\sigma_{\pi}(T_{\Delta})\cap D_{\Delta}=\sigma_{\pi}(T)\cap D_{\Delta}$；

(4) $\sigma_r(T_{\Delta})\cap D_{\Delta}=\sigma_r(T)\cap D_{\Delta}$；

(5) $S_p(T_{\Delta})\subset D_{\Delta}=S_p(T)\cap D_{\Delta}$；

(6) $S_p(T_{\Delta})\subset S_p(T)$。

证明参见[19]。

§2 重交换亚正常算子组联合谱的直角分解

算子组$A=(A_1,\cdots,A_n)$称为重交换的，若对任意$i\neq j$，有$A_iA_j=A_jA_i$和$A_iA_j^*=A_j^*A_i$。

引理 2.1 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是重交换的亚正常算子组，则有 $S_p(A)=\sigma_\delta(A)$（A 的联合压缩谱）。

证 由第二章定理 5.5 知，A 正则的充要条件是对任意 f：$\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,*\}$，$\sum_{i=1}^{n}A_i^{f(i)}(A_i^*)^{f(i)}$ 可逆。但 A 是亚正常算子组，故对任意 f，$\sum_{i=1}^{n}A_i^{f(i)}(A_i^*)^{f(i)}\geqslant\sum_{i=1}^{n}A_iA_i^*$，因此 A 正则的充要条件是 $\sum_{i=0}^{n}A_iA_i^*$，正则。

引理 2.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，则

$$\mathrm{Re}(S_p(A))=S_p(\mathrm{Re}A),\ \mathrm{Im}(S_p(A))=S_p(\mathrm{Im}A)。$$

证 这可以从交换正常算子组的连续谱映照（第三章定理 1.3）立即推出。

定理 2.3 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为重交换的亚正常算子组，则有

$$\mathrm{Re}(\sigma_\pi(A))=\sigma_\pi(\mathrm{Re}A);\ \mathrm{Im}(\sigma_\pi(A))=\sigma_\pi(\mathrm{Im}A)。$$

证 从定理 1.1 的证明易知 $\mathrm{Re}(\sigma_\pi(A))=\sigma_\pi(\mathrm{Re}A)$，和 $\mathrm{Im}(\sigma_\pi(A))\subset\sigma_\pi(\mathrm{Im}A)$

反之，设 $\mathrm{Re}A=(X_1,\cdots,X_n)$，$\mathrm{Im}A=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 和 A 的记号算子组 $X+iY_\pm=(X_1+iY_1^\pm,\cdots,X_n+iY_n^\pm)$。显然这些都是交换的正常算子组。若 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\sigma_\pi(\mathrm{Re}A)$，由引理 2.2 和第三章定理 1.1 知，必有 $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\sigma_\pi(\mathrm{Im}A)$ 和单位向量列 $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ 使 $(X_k-x_k)g_m\to0$，$(Y_K^+-y_k)g_m\to0$。　　(2.1)

由记号算子定义，对每个 g_m，有 t_m，使

$$\|(e^{it_mX_K}Y_Ke^{-it_mX_K}-Y_K^+)g_m\|<\frac{1}{m},\ k=1,2,\cdots,n。\tag{2.2}$$

由于 X_K 与 Y_K^+ 可交换，所以有

$$\|(Y_ke^{-it_mX_K}-Y_K^+e^{-it_mX_K})g_m\|<\frac{1}{m}。$$

令 $f_m=e^{-it_m X}$，其中 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，注意到 X_k，$Y_k^{\dagger}$ 与 X 的交换性，由（2.1）和（2.2）不难推出。

$$\|(X_k-x_k)f_m\|=\|(X_k-x_k)g_m\|\to 0,$$

$$\|(Y_k-y_k)f_m\|\leqslant\|(Y_k-Y_k^{\dagger})f_m\|+\|(Y_k^{\dagger}-y_k)g_m\|\to 0,$$

$$(m\to\infty)。$$

因此有 $x=(x_1,\cdots,y_n)\in\mathrm{Re}(\sigma_\pi(A))$。同样可得 $\sigma_\pi(\mathrm{Im}A)\subset\mathrm{Im}(\sigma_\pi(A))$。证毕。

多个算子谱论不少地方与单个情形有很大差异，如联合谱的边界点不必是联合近似谱点。这只需看例子：单向平移算子 U，$S_p(U,U)=\{(z,z),|z|\leqslant 1\}$ 的每一点都是边界点，但 $\sigma_\pi(U,U)=\{(z,z),|z|=1\}$。因此下面定理用定理 1.2 方法是行不通的。

定理 2.4 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是重交换的亚正常算子组，则其联合谱可直角分解：

$$\mathrm{Re}(S_p(A))=S_p(\mathrm{Re}A);\quad \mathrm{Im}(S_p(A))=S_p(\mathrm{Im}A)。$$

证　只证第一式，第二式类似可得。由定理 2.3 知，只须证：$S_p(\mathrm{Re}A)\supset\mathrm{Re}(S_p(A))$。下面对算子组的个数归纳。

$k=1$ 时，由定理 1.2 知结论成立。

假设 $k\leqslant n-1$ 时结论都对。

当 $k=n$ 时，设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A)$，由引理 2.1 知这时必有 $\sum_{i=1}^{n}(A_i-\lambda_i)(A_i-\lambda_i)^*$ 奇异。令 $A^0=(A_1^0,\cdots,A_n^0)$ 为 A 的 Berberian 扩张，则 A^0 也是重交换亚正常，且有

$$\mathrm{Ker}\Big(\sum_{i=1}^{n}(A_i^0-\lambda_i)(A_i^0-\lambda_i)^*\Big)=\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}(A_i^0-\lambda_i)(A_i^0-\lambda_i)^*$$

$$\neq\{0\}。$$

令 $\mathfrak{m}=\mathrm{Ker}(A_n^0-\lambda_n)(A_n^0-\lambda_n)^*$，则 $\mathfrak{m}\neq\{0\}$ 且约化 $A^0-\lambda$ 和 $\mathrm{Re}(A^0-\lambda)$。因此

$$\operatorname{Ker}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(A_i^0-\lambda_i)|_{\mathfrak{m}}\,((A_i^0-\lambda_i)|_{\mathfrak{m}})^*\right)$$

$$=\mathfrak{m}\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\operatorname{Ker}(A_i^0-\lambda_i)(A_i^0-\lambda_i)^*\right)\neq\{0\}。$$

由于$(A_1^0|_{\mathfrak{m}},\cdots,A_{n-1}^0|_{\mathfrak{m}})$是$\mathfrak{m}$上重交换亚正常算子组，由归纳假设$(\mathrm{Re}(A_1^0-\lambda_1)|_{\mathfrak{m}},\ \cdots,\ \mathrm{Re}(A_{n-1}^0-\lambda_{n-1})|_{\mathfrak{m}})$ 是奇异的，因而$(\mathrm{Re}A_1^0-\mathrm{Re}\lambda_1,\cdots,\mathrm{Re}A_{n-1}^0-\mathrm{Re}\lambda_{n-1},\ (A_n^0-\lambda_n)(A_n^0-\lambda_n)^*)$也是奇异的，这是因为在公共约化空间$\mathfrak{m}$上限制是奇异的，但它们是交换的正常算子组，故

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\operatorname{Ker}(\mathrm{Re}A_i^0-\mathrm{Re}\lambda_i)\right)\cap\operatorname{Ker}(A_n^0-\lambda_n)(A_n^0-\lambda_n)^*\neq\{0\}。\tag{2.4}$$

令 $\mathfrak{n}=\bigcap_{i=1}^{n-1}\operatorname{Ker}(\mathrm{Re}A_i^0-\mathrm{Re}\lambda_i)$，易知$\mu$ 约化$A_n^0-\lambda_n$和$\mathrm{Re}(A_n^0-\lambda_n)$。因为$(A_n^0-\lambda_n)|_{\mathfrak{n}}$仍亚正常，因此据（2.4）知是奇异的。再据归纳假设，$\mathrm{Re}A_n^0|_{\mathfrak{n}}-\mathrm{Re}\lambda_n=\mathrm{Re}[(A_n-\lambda_0)|_{\mathfrak{n}}]$奇异。这时同前面一样可知$(\mathrm{Re}A_1^0-\mathrm{Re}\lambda_1,\cdots,\mathrm{Re}A_{n-1}^0-\mathrm{Re}\lambda_{n-1},\mathrm{Re}A_n^0-\mathrm{Re}\lambda_n)$ 是奇异的算子组。因此有 $\mathrm{Re}\lambda\in\sigma_\pi(\mathrm{Re}A^0)=\sigma_\pi(\mathrm{Re}A)$。证毕。

§3 重交换亚正常算子组联合谱的直角分割

本节要将定理1.7推广到重交换亚正常算子组情形。

引理 3.1 (Rubin[96]) 设Δ是R^n(或C^n)中的一个凸集，μ是定义在Δ上的一个Borel概率测度，则有

$$\int_\Delta \lambda d\mu(\lambda)\in\Delta,\ 其中\ \lambda\in R^n\ (或\ C^n)。$$

证明略。

定理 3.2 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$为重交换的亚正常算子组，$\mathrm{Re}A=(X_1,\cdots,X_n)$，$\mathrm{Im}A=(Y_1,\cdots,Y_n)$。记$E(\cdot)$为$\mathrm{Re}A$的

乘积谱测度；设 Δ_i 为 R 中区间，$\Delta=\prod_{i=1}^{n}\Delta_i$；$D_\Delta=\{(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)\in C^n,\ (x_1,\cdots,x_n)\in\Delta\}$；令 $H_\Delta=E(\Delta)H, A_\Delta=(A_{1\Delta},\cdots,A_{n\Delta})$，其中 $A_{k\Delta}=E(\Delta)A_k|_{H(\Delta)}, k=1,\cdots,n$。则

(1) $\sigma_p(A_\Delta)=\sigma_p(A)\cap D_\Delta$；

(2) $S_p(A_\Delta)\subset\overline{D}_\Delta$；

而且当 Δ 为 R^n 中乘积开区间时，还有

(3) $\sigma_\pi(A_\Delta)\cap D_\Delta=\sigma_\pi(A)\cap D_\Delta$；

(4) $\sigma_r(A_\Delta)\cap D_\Delta=\sigma_r(A)\cap D_\Delta$；

(5) $S_p(A_\Delta)\cap D_\Delta=S_p(A)\cap D_\Delta$；

(6) $S_p(A_\Delta)\subset S_p(A)$。

证 (1) 设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_p(A_\Delta)$，$\lambda_k=x_k+iy_k, k=1,\cdots,n$。由于 A_Δ 仍是重交换亚正常，据定理 1.1 必存在单位向量 f，使得 $X_kf=x_kf$，$Y_{k\Delta}f=y_kf$ $(Y_{k\Delta}=E(\Delta)Y_k|_{H(\Delta)})$。据引理 3.1，有 $x=(x_1,\cdots,x_n)=(\langle X_1f,f\rangle,\cdots,\langle X_nf,f\rangle)=\int_\Delta z d\|E(z)f\|^2\in\Delta$。因此 $\lambda\in D_\Delta$。又可验证 $E(\{x\})H$ 约化 $\mathrm{Im}A=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 且 $f\in E(\{x\})H\subset H_\Delta$，所以 $Y_kf=y_kf$。从而 $A_kf=\lambda_kf, k=1,2,\cdots,n$。

反之设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_p(A)\cap D_\Delta$，$\lambda_k=x_k+iy_k$。因为 $x=(X_1,\cdots,x_n)\in\Delta$，所以 $A_kf=\lambda_kf$ 可推出 $f\in E(\{x\})H\subset H_\Delta$，从而 $A_{k\Delta}f=\lambda_kf$，$k=1,\cdots,n$。

(2) 令 $D_{i\Delta}=\{(z_1,\cdots,z_n)|\in C^n, \mathrm{Re}z_i\in\Delta_i\}$，$i=1,\cdots,n$。注意到对于单个算子(b)已成立（定理 1.7），因此不难验证

$$S_p(A_\Delta)\subset\prod_{i=1}^{n}S_p(A_i\Delta)\subset\bigcap_{i=1}^{n}\overline{D_i\Delta}=\overline{D}。$$

(3) 设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_\pi(A)\cap D_\Delta$，$\lambda_k=x_k+iy_k$，这时必存在单位向量 $\{f_m\}\subset H$，使得

$(X_k-x_k)f_m\to0$，$(Y_k-y_k)f_m\to0$ $(m\to\infty)$，$k=1,\cdots,n$。

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 到 Δ 的边界的距离为 δ，则对任意 $f\in E(\Delta^c)H$，

$$\sum_{i=1}^{n}\|(X_k-x_k)f\|^2=\int_{\Delta^c}\sum_{i=1}^{n}|\mu_k-x_k|^2 d\|E(\mu)f\|^2\geqslant\delta^2\|f\|^2$$

所以可不妨$\{f_m\}\subset H_\Delta$，这时有

$$\begin{aligned}(A_{k_\Delta}-\lambda_k)f_m&=(A_k-\lambda_k)f_m+(A_{k_\Delta}-A_k)f_m\\&=(A_k-\lambda_k)f_m+i(E(\Delta)-I)Y_kf_m\end{aligned}$$

第一次趋于0，第二项有

$$\begin{aligned}\|E(\Delta^c)Y_kf_m\|&\leqslant\|E(\Delta^c)(Y_k-y_k)f_m\|+\|E(\Delta^c)y_kf_m\|\\&\leqslant\|(Y_k-y_k)f_m\|+|y_k|\,\|E(\Delta^c)f_m\|\to 0,\end{aligned}$$

所以 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_\pi(A_\Delta)\cap D_\Delta$。

反之设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_\pi(A_\Delta)\cap D_\Delta$，$\lambda_k=x_k+iy_k$，$k=1,\cdots,n$，则存在一列单位向量$\{f_m\}\subset H_\Delta$，使得

$$(X_k-x_k)f_m\to 0,\ (E(\Delta)Y_k-y_k)f_m\to 0,\ k=1,\cdots,n。$$

类似上面，$(A_k-\lambda_k)f_m=(A_{k_\Delta}-\lambda_k)f_m+i(Y_k-E)$，

只需证 $E(\Delta^c)Y_Kf_m\to 0$。由(3.1)知，只需证 $\sum_{i=1}^{n}\|(X_i-x_i)Y_kf_m\|$ $\to 0$，对 $i\neq k$，$\|(X_i-x_i)Y_kf_m\|\to 0$ 是显然的，当 $i=k$ 时，

$$\langle(X_k-Y_k-Y_kX_k)f_m,f_m\rangle=\langle(X_{k_\Delta}Y_{k_\Delta}-Y_{k_\Delta}X_{k_\Delta})f_m,f_m\rangle$$
$$=\langle Y_{k_\Delta}f_m,X_{k_\Delta}f_m\rangle-\langle X_{k_\Delta}f_m,Y_{k_\Delta}f_m\rangle\to 0。$$

但 $X_kY_k-Y_kX_k\geqslant 0$，所以有

$$(X_k-x_k)Y_kf_m=(X_kY_k-Y_kX_k)f_m+Y_k(X_k-x_k)f_m\to 0,\quad (m\to\infty),$$

这就证明了 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_\pi(A)\cap D_\Delta$。

(5) 由定义可知一个算子 Berberian 扩张后的实部等于其实部的 Berberian 扩张，因此$(A_\Delta)^0=(A^0)_\Delta$，因此下面我们不妨假设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$已经作了 Berberian 扩张。

$n=1$ 时(e)已知成立。设小于 n 时都成立，要证 n 时也对。

设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A_\Delta)\cap D_\Delta$，则在 H_Δ 上有

$$\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}(A_{i_\Delta}-\lambda_i)(A_{i_\Delta}-\lambda_i)^*\neq\{0\},\qquad(3.2)$$

记 $\widetilde{\Delta}=\Delta_1\times\cdots\times\Delta_{n-1}$，则 $\Delta=\widetilde{\Delta}\times\Delta_n$，因此有 $H_{\Delta_n}\supset H_\Delta$ 和 $H_{\widetilde{\Delta}}\supset H_\Delta$。从而易知 $\mathfrak{n}=\mathrm{Ker}(A_{n\Delta_n}-\lambda_n)^*\supset\mathrm{Ker}(A_{n\Delta}-\lambda_n)^*$ 和 $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}(A_{i\widetilde{\Delta}}-\lambda_i)(A_{i\widetilde{\Delta}}-\lambda_i)^*\supset\bigcap\limits_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}(A_{i\widetilde{\Delta}}-\lambda_i)(A_{i\Delta}-\lambda_i)^*$，所以有

$$(\mathfrak{n}\cap H_{\widetilde{\Delta}})\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}(A_{i\widetilde{\Delta}}-\lambda_i)^*\right)\neq\{0\}。$$

可看出 $\mathfrak{n}$ 和 $H_{\widetilde{\Delta}}$ 皆约化 $A_{i\widetilde{\Delta}}, A_i, i=1,\cdots,n-1$，因此 $((A_{1\widetilde{\Delta}}-\lambda_1)^*|_{\mathfrak{n}\cap H_{\widetilde{\Delta}}},\cdots,(A_{n-1\widetilde{\Delta}}-\lambda_{n-1})^*|_{\mathfrak{n}\cap H_{\widetilde{\Delta}}})$ 是奇导的，可以验证 $(A_{i\widetilde{\Delta}}-\lambda_i)^*|_{\mathfrak{n}\cap H_{\widetilde{\Delta}}}=((A_i-\lambda_i)|_{\mathfrak{n}})_{\widetilde{\Delta}}, i=1,\cdots,n-1$。由归纳假设知 $((A_1-\lambda_1)(A_1-\lambda_1)^*|_{\mathfrak{n}},\cdots,(A_{n-1}-\lambda_{n-1})(A_{n-1}-\lambda_{n-1})^*|_{\mathfrak{n}})$ 是奇异的。令 $\mathfrak{m}=\bigcap\limits_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}(A_i-\lambda_i)^*$，则 $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}\neq\{0\}$。注意到 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{n}$ 都约化 A_n 和 $A_{n\Delta_n}$，并且 $(A_{n\Delta_n}-\lambda_n)|_{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}}$ 奇异，但这即 $(A_n|_{\mathfrak{m}}-\lambda_n)_{\Delta_n}$ 奇异，再由假设知 $(A_n-\lambda_n)|_{\mathfrak{m}}$ 奇异，所以 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}(A_i-\lambda_i)(A_i-\lambda_i)^*\neq\{0\}$，这就证明了 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A)\cap D_\Delta$。反之，设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A)\cap D_\Delta$。这时有

$$\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}(A_i-\lambda_i)(A_i-\lambda_i)^*\neq\{0\}。\tag{3.3}$$

令 $\mathfrak{n}=\mathrm{Ker}(A_n-\lambda_n)^*$，则 $\mathfrak{n}$ 约化 $A_i, A_{i\widetilde{\Delta}}, i=1,\cdots,n-1$。由于 $([(A_1-\lambda_1)|_{\mathfrak{n}}]_{\widetilde{\Delta}},\cdots,[(A_{n-1}-\lambda_{n-1})|_{\mathfrak{n}}]_{\widetilde{\Delta}})$ 奇异，但这即 $((A_{1\widetilde{\Delta}}-\lambda_1)|_{\mathfrak{n}\cap H_{\widetilde{\Delta}}},\cdots,(A_{n-1\widetilde{\Delta}}-\lambda_{n-1})|_{\mathfrak{n}\cap H_{\widetilde{\Delta}}})$ 是奇异的。令 $\mathfrak{m}=\bigcap\limits_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}((A_{i\widetilde{\Delta}}-\lambda_i)^*|_{\mathfrak{n}\cap H_{\widetilde{\Delta}}})$，则 $\mathfrak{m}\neq\{0\}$，且 $\mathfrak{m}$ 约化 A_n 和 $A_{n\Delta_n}$。显然这时 $(A_n-\lambda_n)|_{\mathfrak{m}}$ 是奇异的，据假设有 $(A_{n\Delta_n}-\lambda_n)|_{\mathfrak{m}\cap H_\Delta}=((A_n-\lambda_n)_{\mathfrak{m}})\Delta_n$ 是奇异的，因涉及的都是重交换亚正常算子，因此 $\mathfrak{n}\cap\mathfrak{m}\cap H_{\Delta_n}\neq\{0\}$，所以存在 $f\neq0$，使 $(A_{n\Delta_n}-\lambda_n)^*f=0$ 和 $(A_{i\widetilde{\Delta}}-\lambda_i)^*f=0$，$i=1,\cdots,n-1$。设 $\widetilde{E}$ 和 E_n 分别为 $(\mathrm{Re}A_1,\cdots,\mathrm{Re}A_{n-1})$

和 Re A_n 的谱测度，则由于$\widetilde{E}(\widetilde{\Delta})$与 A_n 可交换，$E_n(\Delta_n)$ 和 A_i，$i=1,\cdots,n-1$，可交换，就可得出 $\sum_{i=1}^{n}\|(A_{i_\Delta}-\lambda_i)^*f\|=0$。这就证得了 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A_\Delta)\cap D_\Delta$。

（4）由于 A 的联合谱是联合压缩谱（引理 2.1），因此从(3)和（5）可立得（4）。

（6）类似于（5），可用归纳法证明，这里不再赘述了。

§4 极分解及联合豫解式

这一节中，我们首先推广定理 1.3（Putnam），然后给出一个联合豫解式的增长的精确估计，

定理 4.1 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 为重交换的亚正常算子组，则对任何 $r=(r_1,\cdots,r_n)\in S_p(T^*T)\cap S_p(TT^*)$，必有 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in S_p(T)$，使 $|z|_k=\sqrt{r_k}$，$k=1,\cdots,n$。

证 实际上只须对 $r=(r_1,\cdots,r_n)\in S_p(T^*T)$进行证明。因为 T^*T 是交换的正常算子组，由Ⅲ定理 1.3 可知$\sqrt{r}=(\sqrt{r_1},\cdots,\sqrt{r_n})\in S_p(|T|)$，这里 $|T|=(|T_1|,\cdots,|T_n|)$。

先假定每个 T_K 均可逆，而且对于极分解 $T_k=U_k|T_k|$，有 $1\overline{\in}S_p(U_k)$，$k=1,\cdots,n$。作 Cayley 变换 $A_k=i(U_k+z)(U_k-I)^{-1}$，从而有 $U_k=(A_k+i)(A_k-i)^{-1}$，$k=1,\cdots,n$。令 $Q=(Q_1,\cdots,Q_n)$，其中 $Q_k=A_k+i|T_k|$，$k=1,\cdots,n$。由于 $i(A_k|T_k|-|T_k|A_k)=(U_k-1)^{-1}((T_k^*T_k)^{\frac{1}{2}}-(T_kT_k^*)^{\frac{1}{2}})(U_k^*-1)^{-1}$，因此 Q 仍是重交换的亚正常算子组。由定理 2.3 不难知道，必存在 $u=(u_1\cdots,u_n)\in R^n$，使 $\lambda=u+i\sqrt{r}\in\sigma_\pi(Q)$。不妨现在已作了 Berberian 变换，则存在 $f\neq0$，使 $A_kf=u_kf$，$|T_k|f=\sqrt{r_k}f$，$k=1,\cdots,n$。

设$\theta_k=(u_k+i)(u_k-i)^{-1}$，则有$U_kf=\theta_kf$，$k=1,\cdots,n$。令 $z_k=\theta_k\sqrt{r_k}$，则显然 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\sigma_\pi(T)\subset S_p(T)$，且 $|z|=\sqrt{r}$。

对于一般的重交换亚正常算子组 $T=(T_1,\cdots,T_n)$，记 $E(\cdot)$ 为 $\mathrm{Re}(T)$ 的乘积谱测度，令 $\Delta=R\setminus\left(-\frac{1}{m},\ \frac{1}{m}\right)$，

$$\Delta_m=\underbrace{\Delta\times\cdots\times\Delta}_{n}$$

记 $T^m=(T_1^m,\cdots,T_n^m)$，其中 $T_i^m=E(\Delta_m)T_iE(\Delta_m)$。记 $H_1=E(\{0\})H$ 由 T 的亚正常性，不难知道 H_1 约化 $T=(T_1,\cdots,T_n)$，而且限制在 H_1 上时，T 成为变换的正常算子组，这时定理显然是成立的，故从 $S_p(T^*T)=S_p(T^*T|_{H_1})\bigcup S_p(T^*T|_{H_1^\perp})$ 知只须考虑 $r=(r_1,\cdots,r_n)\in S_p(T^*T|_{H_1^\perp})$。据定理 3.2，当 T^m 限制在约化空间 $H_{\Delta_m}=E(\Delta_m)H$ 上时，有

$$S_p(T_{\Delta_m}^m)\subset\overline{D}_{\Delta_m}=\overline{\{x+iy,x+iy\in C^n;\ x\in\Delta_m\}},$$

这时由第三章定理 5.2 知 $S_p(T_{\Delta_m}^m)\subset D_{\Delta_m}$，因此显然 $T_{\Delta_m}^m$ 是满足上段证明的假设要求的。

设 $r=(r_1,\cdots,r_n)\in S_p(T^*T|H_1^\perp)$，若 $r=(0,\cdots,0)$，则定理显然成立。因此假定 r 不恒为 0，由于在 $H_1^\perp$ 上，$T^m\xrightarrow{s}T$，$(T^m)^*\xrightarrow{s}T^*(m\to\infty)$，和任给单位向量 f，$\|\sum\limits^n(|T_i^m|-\sqrt{r_i})^2f\|\geqslant\mathrm{dist}\left(0,S_p\left[\sum\limits_{i=1}^n(|T_i^m|-\sqrt{r_i})^2\right]\right)=\mathrm{dist}^2(r,S_p(|T^m|)$（最后一步是由于交换正常算子组 $|T^m|$ 的连续），因此不难知道，存在一列 $t^m\in S_p(|T^m|)$，t^m 不恒为 0，使得 $t^m\to r\in S_p(|T|)$。因 $t^m\neq(0,\cdots,0)$，所以 $t^m\in S_p(|T_{\Delta_m}^m|)$，由上节讨论和开头的证明知，存在 $z^m\in S_p(T_{\Delta_m}^m)$ 使 $|z^m|=t^m$。由定理 3.2 和第三章定理可知，$z^m\in S_p(T)$。$S_p(|T|)$ 是 C^n 中紧集，故可不妨 $z^m\to z\in S_p(T)$，显然 $|z|=\sqrt{r}$。证毕。

推论 4.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是重交换的亚正常算子组，则对任意 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$，有

$$\inf\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\|(A_k-z_k)^*f\|^2\right)^{\frac{1}{2}};\|f\|=1\right\}=\operatorname{dist}(z,S_p(A))。$$

证　$(A-z)(A-z)^*$ 是交换的正常算子组，据第三章定理3.5，有 $\operatorname{conv}S_p((A-z)(A-z)^*)=\overline{W((A-z)(A-z)^*)}$。因为

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\|(A_k-z_k)^*f\|^2;\ \|f\|^2=1\right\}$$

$$=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\langle(A_k-z_k)(A_k-z_k)^*f,f\rangle;\ \|f\|=1\right\},$$

所以存在 $r=(r_1,\cdots,r_n)\in S_p((A-z)(A-z)^*)$，$r=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\|(A_K-z_K)^*f\|^2;\ \|f\|=1\right\}$。据定理4.1，存在 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A-z)$，使得 $\lambda=\sqrt{r}$。既然有 $S_p(A-z)=S_p(A)-z$，则可推出

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\|(A_k-z_k)^*f\|^2,\ \|f\|=1\right\}\geqslant\operatorname{dist}(z),S_p(A))^2。$$

反之，设 $u=(u_1,\cdots,u_n)\in S_p(A)$ 使得 $\operatorname{dist}|z,\ S_p(A))=|z-u|$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|(A_k-z_k)^*f\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\|(A_k-u_k)^*f\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\operatorname{dist}(z,S_p(A)),$$

对每一个单位向量 f 成立。因此得到相反的不等式。证毕。

定义 4.3　设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为 Hilbert 空间 H 上的交换算子组，$\hat{A}$ 为对应 A 的 $H\otimes C^{2^{n-1}}$ 上的算子矩阵(见第二章)。我们称 $(\widehat{A-\lambda})^{-1}$，$\lambda\overline{\in}S_p(A)$ 为 A 的联合豫解式。

定理 4.4　设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为重交换的亚正常算子组，则对任何 $z=(z_1,\cdots,z_n)\overline{\in}S_p(A)$，有

$$\|(\widehat{A-z})^{-1}\|=1/\operatorname{dist}(z,S_p(A))。$$

证　因为 $z\overline{\in}S_p(A)$，据Ⅱ定理5.1知 $\widehat{A-z}$ 可逆。由于 A 是

重交换的，容易计算出此时

$(\widehat{A-z})(\widehat{A-z})^*=\bigotimes_f(A_i-z_i)^{f(i)}(A_i^*-\overline{z_i})^{f(i)}$，其中 f 是 $\{1,\cdots,n\}$ 到 $\{1,*\}$ 的映射。因为 A 是亚正常的，所以对任意 f 有

$$\sum_{i=1}^n(A_i-z_i)^{f(i)}(A_i^*-\overline{z_i})^{f(i)}\geqslant\sum_{i=1}^n(A_i-z_i)(A_i-z_i)^*,$$

因此当右边可逆时，有

$$\left(\sum_{i=1}^n(A_i-\lambda_i)^{f(i)}(A_i^*-\overline{z_i})^{f(i)}\right)^{-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n(A_i-\lambda_i)(A_i^*-\overline{z_i})\right)^{-1},$$

所以

$$\begin{aligned}&\|(\widehat{A-z})^{-1}\|^2\\&=\sup_f\left\|\left(\sum_{i=1}^n(A_i-\lambda_i)^{f(i)}(A_i^*-\overline{\lambda_i})^{f(i)}\right)^{-1}\right\|\\&=\left\|\left(\sum_{i=1}^n(A_i-\lambda_i)(A_i^*-\lambda_i)\right)^{-1}\right\|\\&=1/\inf\left\{\left[\left\langle\sum_{i=1}^n(A_i-z_i)(A_i^*-\overline{z_i})g,g\right\rangle,\ \|g\|=1\right\}\\&=1/\inf\left\{\sum_{i=1}^n\|(A_i-z_i)^*g\|^2,\|g\|=1\right\}\\&=1/\{\mathrm{dist}(z,S_p(A))\}^2\end{aligned}$$

（推论 4.2）。证毕。

§5 重交换亚正常算子组的广义记号算子组

对于重交换的亚正常算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$，可以引进 A 的广义记号算子组 $A^K=(A_1^K,\cdots,A_n^K)$，这里，$K=(k_1,\cdots,k_n)$，$0\leqslant k_i\leqslant1$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 $A_i^K=k_iA_i^++(1-k_i)A_i^-$，其中 $A_i^\pm$ 是 A_i 的记号算子，$i=1,\cdots,n$。

下面将推广定理1.6。

引理5.1 设$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$为一组标函数，（即$[0,+\infty)$到$[0,+\infty)$的严格单调增的连续函数），$A=(A_1,\cdots,A_n)$为重交换的亚正常算子组，$A_l=X_l+iY_l$为直角分解，$l=1,\cdots,n$。记

$$\tau_\varphi(z)=(\tau_{\varphi_1}(z_1),\cdots,\tau_{\varphi n}(z_n))$$
$$=(x_1+i\varphi_1(y_1),\cdots,x_n+i\varphi_n(y_n)),(z_l=x_l+iy_l);$$
$$\tau_\varphi(A)=(\tau_{\varphi_1}(A_1),\cdots,\tau_{\varphi_n}(A_n))$$
$$=(X_1+i\varphi_1(Y_1),\cdots,X_n+i\varphi_n(Y_n))。$$

如果A_l皆φ_l－亚正常（即$\varphi_l(A_l)$是亚正常的）。$l=1,\cdots,n$，则有

$$S_p(\tau_\varphi(A))=\tau_\varphi(S_p(A))。$$

证　用归纳法，当$n=1$时，是已知结果[19][7]。设对于$n-1$时引理成立，下面证n时也成立。

设$z=(z_1,\cdots,z_n)\in S_p(A)$，因此$\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k-z_k)(A_k-z_k)^*$奇异，用Berberian技巧，可不妨设

$$\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{Ker}(A_k-z_k)^*=\{0\},\tag{5.1}$$

记$m=\mathrm{Ker}(A_n-z_n)^*$，则$m$约化$A_1,\cdots,A_{n-1}$为重交换的亚正常算子组$\widetilde{A}=(A_1|_m,\cdots,A_{n-1}|_m)$。由(5.1)式可知$\widetilde{z}=(z_1,\cdots,z_{n-1})\in S_p(\widetilde{A})$。再据归纳假设$(\tau_{\varphi_1}(z_1),\cdots,\varphi_{n-1}(z_{n-1}))\in S_p(\tau_{\varphi_1}(\widetilde{A}_1),\cdots,\tau_\varphi(\widetilde{A}_{n-1}))$，从而有

$$\sum_{k=1}^{n-1}\tau_{\varphi_k}(A_k-z_k)\tau_{\varphi_k}(A_k-z_k)^*+(A_n-z_n)(A_n-z_n)^*\ 奇异。$$

再由Berberian技巧可知，$\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}\mathrm{Ker}\tau_{\varphi_k}(A_k-z_k)^*\cap\mathrm{Ker}(A_n-z_n)^*\neq\{0\}$。设$n=\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}\mathrm{Ker}\tau_{\varphi_k}(A_k-z_k)^*$，它约化$A_n$，重复上面讨论可知$\sum\limits_{k=1}^{n}\tau_{\varphi_k}(A_k-z_k)\tau_{\varphi_k}(A_k-z_k)^*$不可逆，即$\tau_\varphi(z)=S_p(\tau_\varphi(A))$。

反之，若$(\tau_{\varphi_1}(z_1)\cdots,\tau_{\varphi_n}(z_n))\in S_p(\tau_{\varphi_1}(A_1),\cdots,\tau_{\varphi_n}(A_n))$，同样两次利用 Berberian 技巧可知$(z_1,\cdots,z_n)\in S_p(A_1,\cdots,A_n)$。证毕。

定理5.2 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$为重交换的亚正常算子组，$A^K=(A_1^K,\cdots,A_n^K)$为其广义记号算子组，则有下面公式成立：

$$S_p(A)=\bigcup_{k\in K}S_p(A^K),K=\{k=(k_1,\cdots,k_n),$$
$$0\leqslant k_i\leqslant 1,i=1,\cdots,n\}。$$

证 记$\sigma=\bigcup_{k\in K}S_p(A^K)$，首先证明$\sigma$为闭集。

设$z^{(m)}=(z_1^{(m)},\cdots,z_1^{(m)})\in\sigma,z^{(m)}\to z(m\to\infty)$。则有$k^{(m)}\in K$，使$z^{(m)}\in S_p(A^{k^{(m)}})$，由$K$的紧性可不妨设$k^{(m)}\to k$，$(m\to\infty)$。由于$A^{K^m}$是交换的正常算子组，从而存在一列单位向量$\{f_m\}$，使

$$\sum_{i=1}^n\|(A_i^{K^m}-z_i^{(m)})f_m\|\leqslant\frac{1}{m}。$$

从而 $\|(A_i^K-z_i)f_m\|$

$$\leqslant\|(A_i^K-A_i^{K^m})f_m\|+\|(A_i^{K^m}-z_i)f_m\|+|z_i+z_i^m|\,\|f_m\|\to 0$$
$$(m\to\infty)。$$

因此$z\in S_p(A^K)$，即知σ为闭集。

现设$(0,\cdots,0)\overline{\in}S_p(A)$，则我们作

$A_l^K(t)=X_l+ik_le^{iX_lt}Y_le^{-iX_lt}$，$l=1,\cdots,n$。

$A^K(t)=(A_1^K(t),\cdots,A_n^K(t))$，

则易知它也是重交换的亚正常算子组。由引理5.1知，对任意固定的k和t，都成立$S_p(A^K(t))=S_p(A)$。则$(0,\cdots,0)\overline{\in}S_p(A^K(t))$，由推论4.2知，这时对任意向量$f\in H$，有

$$\sum_{i=1}^n\|(A_i^{(K)}(t))^*f\|^2\geqslant\text{dist}(0,S_p(A))^2\|f\|^2。$$

令$t\to\infty$，则$\sum_{i=1}^n\|(A_i^K)^*f\|^2\geqslant\text{dist}(0,S_p(A))^2\|f\|^2$，即

$(0,\cdots,0)\overline{\in}S_p(A^K)$，从而$\sigma\subset S_p(A)$。

反之，用归纳法证明$S_p(A)\subset\sigma$。

$n=1$时成立（定理1.6）。若对$n-1$也成立，下面证n时也对。若$(0,\cdots,0)\overline{\in}\sigma$，由于$\sigma$是闭集，故存在$y>0$，使对一切$k=(k_1,\cdots,k_n)$，都有

$$\sum_{i=1}^{n}\|A_i^{(K)}(t)f\|^2\geqslant y\|f\|^2,\ f\in H。$$

由于$A^K=(A_1^K,\cdots,A_n^K)$交换正常，所以对上述$y>0$，存在$A_n^{K_n}(A_n^{K_n})^*$的谱子空间$H_y\neq\{0\}$，约化$A_1,\cdots,A_{n-1},A_1^{K_1},\cdots,A_{n-1}^{K_{n-1}}$，使得

$$\sum_{i=1}^{n-1}\|A_i^Kf\|^2\geqslant\frac{y}{2}\|f\|^2,\ f\in H_y;$$

$$\|A_n^{K_n}f\|^2\leqslant\frac{y}{2}\|f\|^2。\ f\in H_y;$$

$$\|A_n^{K_n}f\|^2\geqslant\frac{y}{2}\|f\|^2,\ f\in H_y^{\perp},$$

从而可知$0\overline{\in}S_p(A_1^{K_1}|_{H_y},\cdots,A_{n-1}^{K_{n-1}}|_{H_y})$。由归纳假设可知，$0\overline{\in}S_p(A_1|_{H_y},\cdots,A_{n-1}|_{H_y})$，从而$0\overline{\in}S_p(A_1,\cdots,A_{n-1},A_n^{K_n})$，$0\leqslant K_n\leqslant1$。同样可证$\bigcup\limits_{0\leqslant K_n\leqslant1}S_p(A_1,\cdots,A_{n-1},A_n^{K_n})$为闭集，从而存在$y_1>0$，使$\sum\limits_{K=1}^{n-1}\|A_K^*f\|^2+\|A_n^{K_n*}f\|^2\geqslant y_1\|f\|^2$。

同样，存在$(A_1A_1^*,\cdots,A_{n-1}A_{n-1}^*)$的乘积谱测度子空间$H_{y_1}$约化$A_n,A_n^{K_n}$，使得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\|A_k^*f\|^2\leqslant\frac{y_1}{2}\|f\|^2,\ f\in H_{y_1};$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\|A_k^*f\|^2\geqslant\frac{y_1}{2}\|f\|^2,\ f\in H_{y_1}^{\perp};$$

$$\|A_n^{K_n*}f\|^2 \geqslant \frac{y_1}{2}\|f\|^2,\ f\in H_{y1},$$

从而导出 $0\ \overline{\in} S_p(A_n|_{Hy_1})$。这样就可知 $0=(0,\cdots,0)\ \overline{\in} S_p(A)$ 。证毕。

§6　关于次正常算子组

关于单个次正常算子，Halmos 有一个著名定理，就是这个算子的谱包含了其极小正常扩张算子的谱 [122]。下面我们要推广这个结果。

定义 6.1　Hilbert 空间 H 上的算子组 $S=(S_1,\cdots,S_n)$称为是次正常的，如果存在交换的正常算子组 $N=(N_1,\cdots,N_n)$ 作用在 $K\supset H$ 上是 S 的公共扩张。

显然，次正常算子组一定是交换的算子组，反过来交换算子组，每个算子都是次正常，不一定是次正常算子组。

例 6.2　设 H 是具有基$\{e_n,n=0,\pm1,\pm2\cdots\}$ 的可分 Hilbert 空间，定义 H 上算子 U_1，U_2 如下：

$$U_1e_n=e_n+1,\ 当\ n\geqslant0,\ U_1e_n=0,\ n<0。$$

$$U_2e_n=0,\ 当\ n>0,\ U_2e_n=e_{n-1},n\leqslant0。$$

则有 $U_1U_2=U_2U_1=0$，而且显然都是次正常的（实际上还是拟正常的）。如果(U_1,U_2)存在交换的公共正常扩张，则 U_1+U_2也将是次正常，更是亚正常的。令 $Q=U_1+U_2$，$f=e_1+e_{-1}$,经计算可知。

$\langle(Q^*Q-QQ^*)f,f\rangle=-1<0$，这是矛盾的。因此$(U_1,U_2)$不存在交换的公共正常扩张。

设 $S=(S_1,\cdots,S_n)$是次正常算子组，则类似于单个算子可知 S 存在唯一确定（在等距同构意义下）的极小变换正常扩张。下面是 Halmos 结果的推广。

定理 6.3 设 $S=(S_1,\cdots,S_n)$ 是 H 上的次正常算子组，$N=(N_1,\cdots,N_n)$是其在 $K\supset H$ 上的极小的交换正常扩张，则有 $S_p(N,K)\subset S_p(S,H)$

证 这只须证 $0\overline{\in}S_p(S,H)$时有 $0\overline{\in}S_p(N,K)$，或等价的，$0\overline{\in}S_p(|N|,K)$，这里 $|N|=(|N_1|,\cdots,|N_n|)$。

若 $0\overline{\in}S_p(S,H)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}S_iH=H$。这时对任意 $h\in H$，存在 $h_1,\cdots,h_n\in H$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}S_ih_i=h$。由于差个常数，还可设 $\sum\limits_{i=1}^{n}\|h_i\|^2\leqslant\|h\|^2$。

设 E 为 N 的乘积谱测度，$H_1=E(z,|z|\leqslant 1/2n)H$，则 H_1 是 N 的公共约化子空间。若证得 $H_1\perp H$，则由于N的极小扩张性可知，必有 $H_1=\{0\}$，因而$|N|$就是可逆的。

事实上，设 $l\in H_1,h\in H$，反复套用 $\sum\limits_{i=1}^{n}S_ih_i=h$，我们有

$$
\begin{aligned}
|\langle l,h\rangle| &= |\langle l,\sum_{1\leqslant i_1,\cdots,i_p\leqslant n}S_{i_1}\cdots S_{i_p}h_{i_1\cdots i_p}\rangle| \\
&= |\langle l,\sum N_{i_1}\cdots N_{i_p}h_{i_1\cdots i_p}\rangle| \\
&\leqslant \sum\|N_{i_1}^*\cdots N_{i_p}^*l\|\cdot\|h_{i_1\cdots i_p}\| \\
&\leqslant \sum\||N|^pl\|\cdot\|h_{i_1\cdots i_p}\| \\
&\leqslant \|l\|/(2n)^p\sum\|h_{i_1\cdots i_p}\| \\
&\leqslant (\|l\|/(2n)^p)\sqrt{n^p}\,(\sum\|h_{i_1\cdots i_p}\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|l\|\cdot\|h\|(1/2\sqrt{n})^p
\end{aligned}
$$

令 $p\to\infty$，就得到$\langle l,h\rangle=0$。证毕。

推论 6.4 设 $S=(S_1,\cdots,S_n)$是次正常算子组，则有

$$\bigcap_{\lambda\in S_p(S)}\left(\sum_{i=1}^{n}R(S_i-\lambda_i)^m\right)=\{0\}。$$

这里 $R(S_i-\lambda_i)^m$表示$(S_i-\lambda_i)^m$的值域。

证　可由定理 6.3 与第三章定理 2.2 立即推出。

推论 6.5　设 $S=(S_1,\cdots,S_n)$ 为次正常的算子组，则对任何 $S_p(S)$ 的某邻域上解析的函数 $u=(u_1,\cdots,u_n)$，有

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\|u_k(S)f\|^2,\ \|f\|=1\right\}\geqslant\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}|u_k(z)|^2, z\in S_p(S)\right\},$$

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\|u_k(S)f\|^2,\ \|f\|=1\right\}\leqslant\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|u_k(z)|^2,\ z\in S_p(S)\right\}.$$

证明思路：利用交换正常算子组的谱积分表示（参看第三章），可证推论 6.5 对交换正常算子组是成立的。然后利用定理 6.3 可知这对于次正常的算子组也是成立的。

第五章 非正常算子组的函数模型

本章将定义重交换亚正常算子组的函数模型，并用函数模型证明迹公式、Putnam 不等式和指标公式。

§1 重交换亚正常算子组的函数模型

本节中 $\Omega=(M,\mathscr{B},\mu)$ 为测度空间，D 为 Hilbert 空间。$L^2(\Omega)\otimes D$ 是 $L^2(\Omega)$ 与 D 的张量积，也可以看作定义于 M 上取值于 D 的向量值函数。当 $\Omega=(T^n,\mathscr{B},\mu)$，其中 $T^n=T\times\cdots\times T$，$T$ 为单复平面上的单位圆周，$\mathscr{B}$ 为 Borel 集的全体，$\mu=m+\nu$，$m=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n d\theta_1\cdots d\theta_n$ 为 T^n 上规范的 Lebesgue 测度，ν 是奇异测度。当 $\mu=m$ 时，$f\in L^2(\Omega)\otimes D$ 可以表示为 $f=\sum f_{k_1\cdots k_n}\otimes e^{ik_1\theta_1}\cdots e^{ik_n\theta_n}$，其中 $f_{k_1\cdots k_n}\in D$，$f_{k_1\cdots k_n}=\int_{T^n}f(e^{i\theta})e^{-ik_1\theta_1}\cdots e^{-ik_n\theta_n}dm$。记 $H_j^2(\Omega)=L^2(T)\otimes\cdots\otimes H^2_{(j)}(T)\otimes\cdots\otimes L^2(T)$，$\boldsymbol{B}_j$ 是 z 空间 $H_j^2(\Omega)\otimes D$ 在 $L^2(\Omega)\otimes D$ 中的投影，则由夏道行 [19] 知

$$(\boldsymbol{B}_jf)\ (e^{i\theta})=\lim\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(e^{i\theta_1},\cdots,\zeta_j,\cdots,e^{i\theta_n})}{\zeta_j-re^{i\theta_j}}ds_j \qquad (*)$$

若 $\mu=m_1\times\mu'$，其中 m_1 是 T 上的 Lebesgue 测度，并且对应的变量为 $e^{i\theta_j}$，此时 $f\in L^2(\Omega)\otimes D$ 也可以表示为 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}f_k(e^{i\theta'})\ e^{ik\theta_j}$，其中 $f_k(\rho^{i\theta'})=\int_T f(e^{i\theta})e^{-ik_j\theta_j}dm_1$。我们也用（$*$）定义 $\boldsymbol{B}_j$，此时，$(\boldsymbol{B}_jf)(e^{i\theta})=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(e^{i\theta'})e^{ik\theta_j}$。因此 $\boldsymbol{B}_j$ 也是投影算子。另外我们用 $\hat{U}_j$ 表示 $L^2(T^n)\otimes D$ 上的乘法算子：$(\hat{U}_jf)(e^{i\theta})=e^{i\theta_j}f(e^{i\theta})$，$j=1,\cdots,n$。

当 Q为定义在T^n 上而取$L(D)$值的可测函数时，$(\widehat{Qf})(e^{i\theta})=Q(e^{i\theta})\cdot f(e^{i\theta})$定义了$L^2(T^n)\otimes D$ 上的算子$\widehat{Q}$。

在建立函数模型之前我们需要以下引理，有的易从单个算子的情况平推到 n 个算子的情况。证明略去。

引理 1.1 设 $R_j(\cdot)$是定义在 T^n 上取值于 $L(D)$的可测函数，并且,对于任意$e^{i\theta}\in T^n$,$R_j(e^{i\theta})$是投影算子. $j=1,2$。 Q 是 $\overline{\widehat{R}_1(L^2(T^n)\otimes D_1)}$ 到$\overline{\widehat{R}_2(L^2(T^n)\otimes D_2)}$的有界算子，并且$\widehat{U_j}Q=Q\widehat{U_j}$, $j=1,\cdots,n$。则必有定义在 T^n 上取值于 D_1 到 D_2 的一致有界的算子值的可测函数 $Q(\cdot)$，且满足对任意 $e^{i\theta}\in T^n$,

$$Q(e^{i\theta})R_1(e^{i\theta})D_1\subset R_2(e^{i\theta})D_2,\quad \|Q(e^{i\theta})\|\leqslant\|Q\|,$$

使得 $Q=\widehat{Q}$。特别当 $D_1=D_2$, $R_1=R_2$, Q 是正算子时，可使几乎处处的 $e^{i\theta}$,$Q(e^{i\theta})$是 D 上的正算子，而 Q 为投影算子时，$Q(e^{i\theta})$为投影算子。

引理 1.2 设$\widetilde{H}_j=\widehat{R}_j(L^2(\Omega_j)\otimes D_j)$。$j=1,\cdots,m$。$Q$是 $\widetilde{H}=\bigoplus_{j=1}^{m}\widetilde{H}_j$ 上有界线性算子，并且 Q 与$\oplus\widetilde{U}_j$, $j=1,\cdots,n$ 可以交换，则存在定义于 T^n 上取值于 D_i 到D_j的一致有界算子值可测函数$Q_{ij}(\cdot)$，使得 $(Qf)(e^{i\theta})=(Q_{ij}(e^{i\theta}))_{m\times m}f(e^{i\theta})$ 对任意 $f\in\widetilde{H}$ 成立。并且当 Q 为正算子时，可使 $Q(e^{i\theta})=(Q_{ij}(e^{i\theta}))$ 亦为正算子值的可测函数。

证 设 $Q=(Q_{ij})_{m\times m}$，则由条件可知 $Q_{ij}\widehat{U}_k=\widehat{U}_kQ_{ij}$ 对一切 k 成立，于是由引理 1.1得到可测函数 $Q_{ij}(\cdot)$。当 $Q\geqslant0$ 时，用 [19] III 引理 4.4,$Q_{kk}\geqslant0$,$k=1,\cdots,m$，而 $Q_{ij}=Q_{ii}^{\frac{1}{2}}B_{ij}Q_{jj}^{\frac{1}{2}}$，其中 B_{ij} 是 $\overline{\widehat{R}_j(L^2(\Omega_j)\otimes D_j)}$ 到 $\overline{\widehat{R}_i(L^2(\Omega_i)\otimes D_i)}$ 的压缩算子。由作法可知 B_{ij}

满足条件$\widehat{U}_k B_{ij}=B_{ij}\widehat{U}_k$，$k=1,\cdots,n$，于是得到可测正算子值函数$Q_{ii}(\cdot)$和压缩算子值函数$B_{ij}(\cdot)$，使得$Q_{ii}=\widehat{Q}_{ii}$，$B_{ij}=\widehat{B}_{ij}$，于是$Q=\widehat{Q}=(Q_{ij})$，其中$Q_{ij}(e^{i\theta})=Q_{ii}(e^{i\theta})B_{ij}(e^{i\theta})Q_{jj}(e^{i\theta})$。

引理 1.3 $U=(U_1,\cdots,U_n)$ 是 Hilbert 空间 H 上交换的酉算子。则必有 Hilbert 空间 D，测度空间 $\Omega=(T^n,\mathscr{B},\mu)$，投影算子值可测函数 $R(\cdot)$，H 到$\widehat{R}(L^2(\Omega)\otimes D)$上的酉算子 W，使得

$$WU_jW^{-1}=\widehat{U}_j, j=1,\cdots,n。$$

引理 1.4 $Q(\cdot)$是$\widehat{R}_1(L^2(\Omega_1)\otimes D_1)$到$\widehat{R}_2(L^2(\Omega_1)\otimes D_2)$的一致有界的算子值的可测函数，其中$\Omega_k=(T^n,\mathscr{B},\mu_k)$，$k=1,2$，而$\mu_1$，$\mu_2$的第$j$分量是 Lebesgue 测度。若$\widehat{Q}\boldsymbol{B}_j=\boldsymbol{B}_j\widehat{Q}$，则$Q(\cdot)$与$e^{i\theta_j}$无关。

证　不妨设$j=1$，$\mu_k=m_1\times u_k'$，$k=1,2$。只要证明对任意$a\in D$，$Q(\cdot)a$是与$e^{i\theta_1}$无关的好了。设$Qa=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}f_k(e^{i\theta'})e^{i\theta_1}$，其中$e^{i\theta'}=(e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n})$。由$\boldsymbol{B}_1Qa=Q\boldsymbol{B}_1a=Qa$，可知$k<0$时，$f_k=0$。又因$Q(ae^{-i\theta_1})=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(e^{i\theta'})e^{i(k-1)\theta_1}$，而$\boldsymbol{B}_1Q(ae^{-i\theta_1})=Q\boldsymbol{B}_1(ae^{-i\theta_1})=0$，于是对所有$k>0$，$f_k=0$。这样$Qa=f_0(e^{i\theta'})$与$e^{i\theta_1}$无关。证毕。

设$T_j=U_j|T_j|$是半亚正常算子组，其中U_j是酉算子，$|T_j|$是正算子，$j=1,\cdots,n$。并且当$i\neq j$时，$U_iU_j=U_jU_i$，$|T_i||T_j|=|T_j||T_i|$，$|T_i|U_j=U_j|T_i|$，则称$T=(T_1,\cdots,T_n)$是强重可交换的半亚正常算子组。

为证明方便起见，我们引进一些术语。设$H_1,\cdots,H_n$是H的子空间，并且它们的投影算子$P_1,\cdots,P_n$是两两可以交换的。$N=\{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)|\varepsilon_j=\pm1,j=1,\cdots,n\}$。若$\sigma=\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in N$，记$H_\sigma=\bigcap\limits_{j=1}^{n}H_j^{\varepsilon_j}$，其中$\varepsilon_j=1$时，$H_j^{\varepsilon_j}=H_j$，$\varepsilon_j=-1$时，$H_j^{\varepsilon_j}=H_j^{\perp}$。另外，

记 $N_j^+=\{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)|\varepsilon_j=1\}$，$N_j^-=\{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)|\varepsilon_j=-1\}$。若 $\sigma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$，$\sigma'=(\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n')$，$k\neq j$ 时，$\varepsilon_k=\varepsilon_k'$，而 $\varepsilon_j=-\varepsilon_j'$，则称 σ 与 σ' 关于 j 对称。

定理 1.5 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)=(U_1|T_1|,\cdots,U_n|T_n|)$ 是 Hilbert 空间 H 上的算子组，则 T 是重交换的半亚正常算子组的充分且必要条件是

(1) 存在 H 的分解 $H=\bigoplus_{\sigma\in N}H_\sigma$ 和 Hilbert 空间 $\widetilde{H}=\bigoplus\widetilde{H}_\sigma$ 以及 H 到 $\widetilde{H}$ 上的酉算子 $W=\bigoplus W_\sigma$，其中 $H_\sigma=\widehat{R}_\sigma\ (L^2(\Omega_\sigma)\otimes D_\sigma)$，$\Omega_\sigma=(T^n,\mathscr{B},\mu_\sigma)$，且 $\sigma\in N_j^+$ 时，μ_σ 的第 j 分量是 Lebesgue 测度。

(2) 存在 D_σ 上的一致有界的算子值的可测函数 $\alpha_j^\sigma(\cdot)$，且当 $\sigma\in N_j^-$ 时 $\alpha_j^\sigma(\cdot)=0$，$\sigma\in N_k^+(k\neq j)$ 时，$\alpha_j^\sigma(\cdot)$ 与 $e^{i\theta_k}$ 无关，存在 $D_\sigma\oplus D_{\sigma'}$ （σ 与 σ' 关于 j 对称）上的一致有界的算子值的可测函数 $\beta_j^\sigma(\cdot)$，且当 $\sigma\in N_k^+(k\neq j)$ 时，$\beta_j^\sigma(\cdot)$ 与 $e^{i\theta_k}$ 无关。现记 $\alpha_j(\cdot)=\bigoplus\alpha_j^\sigma(\cdot)$，$\beta_j(\cdot)=\bigoplus\beta_j^\sigma(\cdot)$，$R(\cdot)=\bigoplus R_\sigma(\cdot)$，则下列各式成立：

$$R(\cdot)\alpha_j(\cdot)=\alpha_j(\cdot)R(\cdot),\tag{5.1}$$

$$R(\cdot)\beta_j(\cdot)=\beta_j(\cdot)R(\cdot),\tag{5.2}$$

$$\alpha_j(\cdot)\alpha_k(\cdot)=\alpha_k(\cdot)\alpha_j(\cdot),\tag{5.3}$$

$$\beta_j(\cdot)\beta_k(\cdot)=\beta_k(\cdot)\beta_j(\cdot),\tag{5.4}$$

$$\alpha_j(\cdot)\beta_k(\cdot)=\beta_k(\cdot)\alpha_j(\cdot),\quad (k\neq j)\tag{5.5}$$

$$\alpha_j(\cdot)\geqslant 0,\quad \beta_j(\cdot)\geqslant 0,\tag{5.6}$$

使得
$$WTW^{-1}=\widehat{T}_j=\widehat{U}_j(\widehat{\alpha}_j\boldsymbol{B}_j\widehat{\alpha}_j+\widehat{\beta}_j),\ j=1,\cdots,n。\tag{5.7}$$

证 必要性。设 T 是重交换的半亚正常算子组。令 $H_j=\overline{(|T_j|_+-|T_j|_-)H}$，其中 $|T_j|_+=\lim\limits_{n\to\infty}U_j^{*n}|T_j|U_j^n$，$|T_j|_-=\lim\limits_{n\to\infty}U_j^n|T_j|U_j^{*n}$，$j=1,\cdots,n$。如夏道行[19]一样得到 B_j，使当 $f,g\in(|T_j|_+-|T_j|_-)H$ 时，

$$\langle(|T_j|-|T_j|_-)(|T_j|_+-|T_j|_-)^{\frac{1}{2}}f,(|T_j|_+-|T_j|_-)^{\frac{1}{2}}g\rangle=\langle B_jf,g\rangle。$$

在 H_j^+ 上再补充定义 $B_j=0$。设 P_j 为 H_j 的投影，$|\mathring{T}_j|=B_jP_j$，$j=1,\cdots,n$。易证 $P_jB_j=B_jP_j$。令 $\mathring{T}_j=U_j|\mathring{T}_j|$，由于 $|T_j|_\pm$，$|T_j|$ 分别与 $|T_k|_\pm$，$|T_k|(k\neq j)$ 交换，这样 B_j 与 B_k 也交换，而 $|T_j|_+-|T_j|_-$ 与 $|T_k|_+-|T_k|_-$ 交换，P_j 与 P_k 是它们值域的投影，因此 P_j 与 P_k 也交换。这样 $|\mathring{T}_j|$ 与 $|\mathring{T}_k|$ 交换，$\mathring{T}=(\mathring{T}_1,\cdots,\mathring{T}_n)$ 是重可交换的半亚正常算子组。

易知 $|\mathring{T}_j|_\pm$ 分别为 P_j 和 0，而 $\mathring{T}_j$ 的极差算子 $Q_j=|\mathring{T}_j|-U_j|\mathring{T}_j|U_j^*$ 满足 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}U_j^{*k}Q_jU_j^k=P_j$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_j^{*k}Q_jU_j^k=|\mathring{T}_j|$。由于 $\{P_j\}$ 两两可交换，则有分解 $H=\bigoplus\limits_{\sigma\in N}H_\sigma$

任取 $\sigma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in N$，设其中 m 个 ε_j 为 $+1$，而其它为 -1。不妨 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_m=1$，$\varepsilon_{m+1}=\cdots=\varepsilon_n=-1$。

由于 $U_{m+1},\cdots,U_n$ 在 H_σ 上两两交换，由引理 1.3 存在 $H'=\widehat{R'}(L^2(\Omega')\otimes D')$，其中 $\Omega'=(T^{n-m},\mathscr{B},\mu')$，变量 $e^{i\theta'}=(e^{i\theta_{m+1}},\cdots,e^{i\theta_n})$ 表示，以及 H_σ 到 H' 的酉算子 S，使 $SU_{k+1}S^{-1}=\widehat{U_{k+1}},\cdots,SU_nS^{-1}=\widehat{U_n}$。因 $Q_1,\cdots,Q_m,U_1,\cdots,U_m$ 在 H_σ 上都与 $U_{m+1},\cdots,U_n$ 交换，于是由引理 1.1，存在 $Q_j(\cdot),V_j(\cdot)$，使 $SQ_jS^{-1}=\widehat{Q}_j$，$SU_jS^{-1}=\widehat{V}_j$，$j=1,\cdots,m$。

令 $\Omega_\sigma=(T^n,\mathscr{B},\mu_\sigma)$，$\mu_\sigma=m_n\times\mu'$，$D_\sigma=D'$，$W_\sigma$ 是 H_σ 到 $L^2(\Omega_\sigma)\otimes D_\sigma$ 内的映射，当 $x\in H_\sigma$ 时记 $Vx=x(\cdot)$，

$$W_\sigma x=\sum\widehat{U}_1^{k_1}\cdots\widehat{U}_m^{k_m}\widehat{Q}_1^{\frac{1}{2}}\cdots\widehat{Q}_m^{\frac{1}{2}}\widehat{V}_1^{k_1}\cdots\widehat{V}_m^{k_m}x(\cdot),$$

由于

$$\begin{aligned}
&\|W_\sigma x\|^2\\
&=\sum\|\widehat{U}_1^{k_1}\cdots\widehat{U}_m^{k_m}\widehat{Q}_1^{\frac{1}{2}}\cdots\widehat{Q}_m^{\frac{1}{2}}\widehat{V}_1^{k_1}\cdots\widehat{V}_m^{k_m}x(\cdot)\|^2\\
&=\sum\|\widehat{Q}_1^{\frac{1}{2}}\cdots\widehat{Q}_m^{\frac{1}{2}}\widehat{V}_1^{k_1}\cdots\widehat{V}_m^{k_m}x(\cdot)\|^2
\end{aligned}$$

$$=\sum\|Q_1^{\frac{1}{2}}\cdots Q_m^{\frac{1}{2}}U_1^{k_1}\cdots U_m^{k_m}\|^2$$
$$=\langle\sum U_1^{*k_1}\cdots U_m^{*k_m}Q_1\cdots Q_mU_1^{k_1}\cdots U_m^{k_m}x,x\rangle$$
$$=\langle(\sum_{-\infty}^{\infty}U_1^{*k}Q_1U_1^{k_1})\cdots(\sum_{-\infty}^{\infty}U_m^{*k_m}Q_mU_m^{k_m})x,x\rangle$$
$$=\langle P_1\cdots P_mx,x\rangle$$
$$=\|x\|^2。$$

因此$W_\sigma x\in L^2(\Omega_\sigma)\otimes D_\sigma$，且$W_\sigma$为等距映射。其中第五个等号是由于：$\sum_{-N}^{N}U_j^{*k_j}Q_jU_j^{k_j}$分别强收敛于$\sum_{-\infty}^{\infty}U_j^{*k_j}Q_jU_j^{k_j}$，于是$(\sum_{-N}^{N}U_1^{*k_1}Q_1U_1^{k_1})\cdots(\sum_{-N}^{N}U_m^{*k_m}Q_mU_m^{k_m})$强收敛于$(\sum_{-\infty}^{\infty}U_1^{*k_1}Q_1U_1^{k_1})\cdots(\sum_{-\infty}^{\infty}U_m^{*k_m}Q_mU_m^{k_m})$，而$\sum U_1^{*k_1}\cdots U_m^{*k_m}Q_1\cdots Q_mU_1^{k_1}\cdots U_m^{k_m}$中每一项是正算子，因而也必强收敛于$(\sum_{-\infty}^{\infty}U_1^{*k_1}Q_1U_1^{k_1})\cdots(\sum_{-\infty}^{\infty}U_m^{*k_m}Q_mU_m^{k_m})$。

若$x,y\in H_\sigma$，$j\leqslant m$，则有

$$\langle \boldsymbol{B}_jW_\sigma x,W_\sigma y\rangle$$
$$=\langle\sum_{k_j\geq 0}\widehat{U}_1^{k_1}\cdots\widehat{U}_m^{k_m}\widehat{Q}_1^{\frac{1}{2}}\cdots\widehat{Q}_m^{\frac{1}{2}}\widehat{V}_1^{k_1}\cdots\widehat{V}_m^{k_m}x(\cdot),$$
$$\sum\widehat{U}_1^{k_1}\cdots\widehat{U}_m^{k_m}\widehat{Q}_1^{\frac{1}{2}}\cdots\widehat{Q}_m^{\frac{1}{2}}\widehat{V}_1^{k_1}\cdots\widehat{V}_m^{k_m}y(\cdot)\rangle$$
$$=\langle\sum_{k_j\geq 0}U_1^{*k_1}\cdots U_m^{*k_m}Q_1\cdots Q_mU_1^{k_1}\cdots U_m^{k_m}x,y\rangle$$
$$=\langle\left(\sum_{-\infty}^{\infty}U_1^{*k_1}Q_1U_1^{k_1}\right)\cdots\left(\sum_{k_j=0}^{\infty}U_j^{*k_j}Q_jU_j^{k_j}\right)\cdots\left(\sum_{-\infty}^{\infty}U_m^{*k_m}Q_mU_m^{k_m}\right)x,y\rangle$$
$$=\langle P_1\cdots|\mathring{T}_j|\cdots P_mx,y\rangle$$
$$=\langle|\mathring{T}_j|x,y\rangle,$$

于是$W_\sigma|\mathring{T}_j|W_\sigma^{-1}=\boldsymbol{B}_j$。分别验证$j\leqslant m$，$j>m$不同情况都可得到$W_\sigma U_jx=\widehat{U}_jW_\sigma x$。这样$W_\sigma H_\sigma$是$\widehat{U}_j$，$j=1,\cdots,m$的约化

子空间。由引理 1.1，存在投影算子值的可测函数 $R_\sigma(\cdot)$，使得 $W_\sigma H_\sigma=\widehat{R}_\sigma(L^2(\Omega_\sigma)\otimes D_\sigma)$。记 $\widetilde{H}_\sigma=\widehat{R}_\sigma(L^2(\Omega_\sigma)\otimes D_\sigma)$。

分别作出 2^n 个 $\widetilde{H}_\sigma$ 后（可能有某些 σ，$\widetilde{H}_\sigma=\{0\}$），令 $\widetilde{H}=\oplus\widetilde{H}_\sigma$，$W=\oplus W_\sigma$，$R(\cdot)=\oplus R_\sigma(\cdot)$，$D=\oplus D_\sigma$，则 W 是 H 到 $\widetilde{H}$ 上的酉算子，且易知条件（1）是满足的。

由于 $WU_jW^{-1}=\oplus\widehat{U}_j$，而 $|T_j|_+-|T_j|_-$ 与 $U_k,k=1,\cdots,n$，都可交换，且 H_σ 是 $|T_j|_+-|T_j|_-$ 的约化子空间。由引理 1.1 知必有 $\alpha_j^\sigma(\cdot)$ 是 D_σ 上正算子值的可测函数，使 $W(|T_j|_+-|T|_-)_{H_\sigma}W^{-1}=\widehat{\alpha_j^\sigma}$ 且 $R_\sigma(\cdot)\alpha_j^\sigma(\cdot)=\alpha_j^\sigma(\cdot)R_\sigma(\cdot)=\alpha_j^\sigma(\cdot)$。又 $H_\sigma\oplus H_{\sigma'}$（$\sigma$ 与 σ' 关于 j 对称）为 $|T_j|_-$ 的约化子空间，于是同样也有正算子值的可测函数 $\beta_j^\sigma(\cdot)$，使 $W(|T_j|_-|_{H_\sigma\oplus H_{\sigma'}})W^{-1}=\widehat{\beta_j^\sigma}$，而且 $(R_\sigma(\cdot)\oplus R_{\sigma'}(\cdot))\beta_j^\sigma(\cdot)=\beta_j^\sigma(\cdot)(R_\sigma(\cdot)\oplus R_{\sigma'}(\cdot))=\beta_j^\sigma(\cdot)$。又当 $k\neq j$ 时，$|T_j|_-$，$|T_j|_+-|T_j|_-$ 分别与 $|T_k|_-$，$|T_k|_+-|T_k|_-$ 交换，这样对几乎处处的 $e^{i\theta}$，等号(5.1)—(5.6)成立。而当 $\sigma\in N_j^-$ 时，$|T_j|_+-|T_j|_-$ 在 H_σ 上为 0，故 $\alpha_j^\sigma(\cdot)=0$。当 $\sigma\in N_k^+(k\neq j)$ 时，由于 $|T|_+-|T_j|_-$ 与 $|\mathring{T}_k|$ 交换，而 $W|\mathring{T}_k|W^{-1}$ 在 $\widetilde{H}_\sigma$ 上为 B_k，于是由引理1.4，$\alpha_j^\sigma(\cdot)$ 与 $e^{i\theta_k}$ 无关。同样 $\sigma\in N_k^+$ 时，$\beta_j^\sigma(\cdot)$ 亦与 $e^{i\theta_k}$ 无关，于是条件（2）也满足。

由于 $|T_j|=(|T_j|_+-|T_j|_-)^{\frac{1}{2}}|\mathring{T}_j|(|T_j|_++|T_j|_-)^{\frac{1}{2}}+T_j|_-$，(5.7)也成立。

充分性　由于 $\widehat{\alpha_j}\widetilde{H}=\bigoplus_{\sigma\in N_j^+}\widetilde{H}_\sigma$，而当 $\sigma\in N_j^+$ 时，μ_σ 的第 j 分量是 Lebesgue 测度，于是 $\widehat{\alpha_j}f=\sum_{k=1}a_k(e^{i\theta'})e^{ik\theta_j}$，其中 $a_k(e^{i\theta'})$ 与 $e^{i\theta_j}$ 无关，而 $(\hat{B}_j\alpha f)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(e^{i\theta'})e^{ik\theta_j}$，$B_j(\widehat{U_j^*}\alpha_j f)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(e^{i\theta'})e^{i(k-1)\theta_j}$，经计算可得

$(\widehat{Q}_j f)(e^{i\theta})=\alpha_j(e^{i\theta})a_0(e^{i\theta'})=\alpha_j(e^{i\theta})\int\alpha_j(e^{i\theta})f(e^{i})^{\theta}dm(e^{i\theta}{}^{i})$。

若记$\widehat{P}_j$是$\widetilde{H}$中算子：$(\widehat{P}_j f)(e^{i\theta})=\int f(e^{i\theta})dm\quad(e^{i\theta}{}_{i})$，

则$\widehat{P}_j$是投影算子。这样$\widehat{Q}_j=\widehat{\alpha}_j\widehat{P}_j\widehat{\alpha}_j\geqslant 0$，所以$T_j$是半亚正常算子。又由于条件（2）可得$|T_j|=\widehat{\alpha}_j\boldsymbol{B}_j\widehat{\alpha}_j+\widehat{\beta}_j$与$|T_k|=\widehat{\alpha}_k\boldsymbol{B}_k\widehat{\alpha}_k+\widehat{\beta}_k$是交换的，于是$T=(T_1,\cdots,T_n)$是重交换的半亚正常算子组。证毕。

为作出重交换的亚正常算子组的函数模型，我们考虑$\widetilde{H}=\widehat{R}(L^2(\Omega)\otimes D)$，其中$\Omega=(\Delta,\mathscr{B}_\Delta,\mu)$，$\Delta=\Delta_1\times\cdots\times\Delta_n$，其中$\Delta_j=\sigma(\mathrm{Re}T_j)$，$j=1,\cdots,n$。当$\mu$的第$j$分量是Lebesgue测度时，定义$\widetilde{H}$上的算子$\boldsymbol{P}_j$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Delta$，

$$(\boldsymbol{P}_j f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x_1,\cdots,s_j,\cdots,x_n)}{x_j-(s_j+i\varepsilon)}ds_j,$$

$\widehat{x}_j$也是$\widetilde{H}$上算子，$(\widehat{x}_j f)(x)=x_j f(x)$，$j=1,\cdots,n$。

定理 1.6 设$T=(T_1,\cdots,T_n)=(X_1+iY_1,\cdots,X_n+iY_n)$是Hilbert空间$H$上的算子组，则$T$是重交换的亚正常算子组的充分且必要条件是

（1） 存在H的分解$H=\oplus H_\sigma$和Hilbert空间$\widetilde{H}=\oplus\widetilde{H}_\sigma$，以及$H$到$\widetilde{H}$上的酉算子$\mathrm{W}=\oplus\mathrm{W}_\sigma$，其中$\widetilde{H}_\sigma=\widehat{R}_\sigma(L^2(\Omega_\sigma)\otimes D_\sigma)$，$\Omega_\sigma=(\Delta,\mathscr{B}_\Delta,\mu_\sigma)$，且$\sigma\in N_j^+$时，$\mu_\sigma$的第$j$分量是Lebesgue测度。

（2） 存在D_σ的上的一致有界的算子值的可测函数$\alpha_j^\sigma(\cdot)$，且当$\sigma\in N_j^-$时$\alpha_j^\sigma(\cdot)=0$，$\sigma\in N_k^+(k\neq j)$时，$\alpha_j^\sigma(\cdot)$与x_k无关，存在$D_\sigma\oplus D_{\sigma'}$与（$\sigma$与$\sigma'$关于$j$对称）上一致有界的算子值的可测函数$\beta_j^\sigma(\cdot)$，且当$\sigma\in N_k^+(k\neq j)$时，$\beta_j^\sigma(\cdot)$与$x_k$无关。记$\alpha_j(\cdot)=\oplus\alpha_j^\sigma(\cdot)$，$\beta_j(\cdot)=\oplus\beta_j^\sigma(\cdot)$，$R(\cdot)=\oplus R_\sigma(\cdot)$，$\boldsymbol{D}=\oplus D_\sigma$，则下列各式

成立：

$$R(\cdot)\alpha_j(\cdot)=\alpha_j(\cdot)R(\cdot)=\alpha_j(\cdot \tag{6.1}$$

$$R(\cdot)\beta_j(\cdot)=\beta_j(\cdot)R(\cdot)=\beta_j(\cdot) \tag{6.2}$$

$$\alpha_j(\cdot)\alpha_k(\cdot)=\alpha_k(\cdot)\alpha_j(\cdot), \tag{6.3}$$

$$\beta_j(\cdot)\beta_k(\cdot)=\beta_k(\cdot)\beta_j(\cdot), \tag{6.4}$$

$$\alpha_j(\cdot)\beta_k(\cdot)=\beta_k(\cdot)\alpha_j(\cdot), \quad (j\neq k) \tag{6.5}$$

$$\alpha_j(\cdot)\geqslant 0,\beta_j(\cdot)\geqslant 0, \tag{6.6}$$

使得 $WT_jW^{-1}=\widehat{x_j}+i\,(\widehat{\alpha_j}P_j\,\widehat{\alpha_j}+\widehat{\beta_j})\ \ j=1,\cdots,n$。 (6.7)

证　充分性　作变换 $U_j=(X_j+i)(X_j-i)^{-1}, j=1,\cdots,n$。且不妨 $Y_j\geqslant m_jI, m_j>0$。于是 $A=(U_1Y_1,\cdots,U_nY_n)$ 是重交换的半亚正常算子组。设 $\sigma(X_j)=\Delta_j, \Delta=\Delta_1\times\cdots\times\Delta_n$。令 φ 是 Δ 到 T^n 内的映射：$\varphi\ (x_1,\cdots,x_n)=\left(\frac{x_1+i}{x_1-i},\cdots,\frac{x_n+i}{x_n-i}\right)$。由定理1.5得，$H'=\oplus H'_\sigma$，$H$ 到 H' 的酉算子 W' 和满足(5.1)～(5.6)的 $\alpha'_j(\cdot),\beta'_j(\cdot)$，$j=1,\cdots,n$。设 $H'_\sigma=R'_\sigma(L^2(\Omega_\sigma)\otimes D)$，作 $(\Delta,\mathscr{B}_\Delta)$上的测度 $\mu_\sigma(E)\ =\pi^n\int\frac{d\mu_\sigma}{\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_j^2/2}$。令 $\Omega_\sigma=(\Delta,\mathscr{B},\mu_\sigma)$，其中，$R_\sigma(\cdot)=R'_\sigma(\varphi(\cdot)), \widetilde{H}_\sigma=\widehat{R}_\sigma(L^2(\Omega_\sigma)\otimes D), \widehat{H}=\oplus\widetilde{H}_\sigma$。则映射 W_1：

$$(W_1f)\ (x)=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}f(\varphi(x_1))\prod_{j=1}^{n}\ (x_j-i)^{-1}$$ 是H'到$\widetilde{H}$的酉算子。

令 $\alpha_j(\cdot)=\alpha'_j(\varphi(\cdot)),\beta_j(\cdot)=\beta'_j(\varphi(\cdot))$，易知$\{\alpha_j\},\{\beta_j\}$满足(6.1)—(6.6)。作 $W=W_1W'$，则 $WU_jW^{-1}=(\widehat{x_j}+i)(\widehat{x_j}-i)^{-1}$，于是 $Wx_jW^{-1}=\widehat{x_j}$，$j=1,\cdots,n$。验证 $g=e^{ik\theta_1}\cdots e^{ik\theta_n}a$ 形式的向量可知 $B_jg=WP_jW^{-1}g$，于是得到 $WY_jW^{-1}=\widehat{\alpha_j}P_j\widehat{\alpha_j}+\widehat{\beta_j}$，$j=1,\cdots,n$。(6.7)随之亦成立。

必要性　记$\widetilde{H}$上算子$(\widehat{P_j}f)=\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_j}f(x)\ dm\ (x_j)$，则可验证

$T_j^* T_j - T_j T_j^* = \frac{1}{\pi}\widehat{\alpha_j}\widehat{p_j}\widehat{\alpha_j} \geqslant 0$。又由（6.1～6.6）可知$T=(T_1,\cdots,T_n)$是重交换的。

§2 Mosiac 函数

有了亚正常算子组的模型，我们就可以定义亚正常算子组的Mosiac 函数了。

定理2.1 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)=(X_1+iY_1,\cdots,X_n+iY_n)$ 是 Hilbert 空间 H 上重交换的亚正常算子组，且取定理 1.6 的函数模型的形式，则

（1）必有 $2n$ 元的有界算子值的可测函数 $B(x,y)$，$(x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n))$。它的支集是紧的，而且 $0\leqslant B(x,y)\leqslant I$。对任意 $z_j\overline{\in}\sigma(\widehat{\beta_j})$，$j=1,\cdots,n$。

$$\prod_{j=1}^{n}\ln(1+\alpha_j(x)(\beta_j(x)-z_j)^{-1}\alpha_j(x))=\int\frac{B(x,y)}{\prod_{j=1}^{n}(y_j-z_j)}dy。$$

（2）若记 $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$，则对 $S_p(Y)$ 上的任一有界的连续函数 ψ，

$$\int\psi(y)B(x,y)dy=\alpha(x)\int\psi(\beta_1(x)+k_1\alpha_1^2(x),\cdots,\beta_n(x)+k_n\alpha_n^2(x))dk\cdot\alpha(x),$$

其中 $I^n=[0,1]\times\cdots\times[0,1]$，$dk=dk_1\cdots dk_n$，$\alpha(x)=\alpha_1(x)\cdots\alpha_n(x)$。

证　由夏道行[19]的方法知，存在 $B_j(x,y)$，$0\leqslant B_j(x,y)\leqslant I$，使得

$$\ln(1+\alpha_j(x)(\beta_j(x)-z_j)^{-1}\alpha_j(x))=\int\frac{B_j(x,y_j)}{y_j-z_j}dy_j,$$

由于 $\alpha_j(\cdot),\beta_j(\cdot)$ 与 $\alpha_k(\cdot),\beta_k(\cdot)$ 可交换，于是 $\int\frac{B_j(x,y_j)}{y_j-z_j}dy_j$ 与

$\int\frac{B_k(x,y_k)}{y_k-z_k}dy_k$可交换。这样对几乎处处的$y_j,y_k$，$B_j(x,y_j)$与$B_k(x,y_k)$可交换。令$B(x,y)=B_1(x,y_1)\cdots B_n(x,y_n)$。则$0\leqslant B(x,y)\leqslant I$几乎处处成立，并且满足（1.1），

$$\int\frac{B(x,y)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(y_j-z_j)}dy=\prod_{j=1}^{n}\int\frac{B_j(x,y_j)}{y_j-z_j}dy_j$$

$$=\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j(x)\int_0^1(\beta_j(x)+k_j\alpha_j^2(x)-z_j)^{-1}dk_j\alpha_j(x))$$

$$=\alpha(x)\int\prod_{j=1}^{n}(\beta_j(x)+k_j\alpha_j^2(x)-z_j)^{-1}\cdot dk\alpha(x)。$$

当ψ是多项式时，可取围道Γ_j，使$\sigma(Y_j)$在Γ_j内，由Taylor[113]的公式得

$$\int\psi(y)B(x,y)dy$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{\Gamma_n}\cdots\int_{\Gamma_1}\psi(z)\int\frac{B(x,y)}{\pi(y_j-z_j)}dydz$$

$$=\alpha(x)\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{\Gamma_n}\cdots\int_{\Gamma_1}\psi(z)\int\prod_{j=1}^{n}(\beta_j(x)+k_j\alpha_j^2(x)-z_j)^{-1}dzdk\cdot\alpha(x)$$

$$=\alpha(x)\int\psi(\beta_1(x)+k_1\alpha_1^2(x),\cdots,\beta_n(x)+k_n\alpha_n^2(x))dk\cdot\alpha(x)。$$

当ψ为有界连续函数时，则有多项式ψ_k，使ψ_k一致收敛于ψ。在等式

$$\int\psi_k(y)B(x,y)dy=\alpha(x)\int\psi_k(\beta_1(x)+k_1\alpha_1^2(x),\cdots,\beta_n(x)+k_n\alpha_n^2(x))dk\alpha(x),$$

两边取极限即可得到（1.2）。证毕。

$B(x,y)$也可看作C^n中的函数，当$z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$，$z_j=$

x_j+iy_j，则规定 $B(z)=B(x,y)$。记 $D(T)=\text{ess. supp}B(\cdot,\cdot)=\{z$，不存在 $z=x+iy$ 的邻域 G_z，使 $B(z)$ 在 G_z 中几乎处处为 $0\}$。我们将证明 $D(T)\subset S_p(T)$。为此需要以下引理，证明与单个算子类同，我们略去。

引理2.2 设 $\{M_j(\cdot)\}_{j=1}^n$ 是 Ω 上一致有界的正常算子值的可测函数，且对每个 $x\in\Delta$，$M_j(x)M_k(x)=M_k(x)M_j(x)$。则正常算子组 $M=(\widehat{M}_1,\cdots,\widehat{M}_n)$ 满足等式

$$\text{dist}\ (z,S_p(M))=\text{ess. inf}(z,\ \sigma(M_1)。$$

为证 $D(T)\subset S_p(T)$，我们还可以假定 T_j，$j=1,\cdots,n$，都是完全非正常的，即无非 $\{0\}$ 约化子空间，使其限制在这一子空间上是正常算子。因为若有某 T_j 不是完全非正常的，我们易构造出非 $\{0\}$ 的 T 的公共约化子空间，T 在此子空间上必有 $B(x,y)=0$，此不影响 $D(T)\subset S_p(T)$ 的成立。我们称这样的算子组为完全非正常的。

以下的定理是在完全非正常的条件下，简化定理1.6中的函数模型。

定理2.3 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是重交换的完全非正常的半亚正常算子组，则必有 $\widetilde{H}=\widehat{R}(L^2(\Omega)\otimes D)$，其中 $\Omega=(T^n,\mathscr{B},m)$，$H$ 到 $\widetilde{H}$ 上的酉算子 W，可测算子值函数 $\alpha_j(\cdot),\beta(\cdot)$，满足§1定理1.5中的(5.1)～(5.6)各式，且 $\alpha_k(\cdot),\beta_k(\cdot)$ 限制在 $\widehat{\alpha_j}\widetilde{H}$ 上与 $e^{i\theta_j}$ 无关，使得 $WT_jW^{-1}=\widehat{U}_j(\widehat{\alpha_j}\boldsymbol{B}_j\widehat{\alpha}_j+\widehat{\beta}_j)$，$j=1,\cdots,n$。(3.1)

证　在完全非正常的条件下，定理1.5中出现的 μ_σ 都是 Lebesgue 测度。这可用归纳法证明。

若 $\sigma=(1,\cdots,1)$，则由定理1.5中的 μ_σ 的定义可知，μ_σ 为 Lebesgue 测度。若 $\sigma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 中有 k 个 ε_j 为 -1，已证 μ_σ 为 Lebesgue测度。设 $\sigma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 中有 $k+1$ 个 ε_j 为 -1。设 $\mu_\sigma=m+\nu_\sigma$，

ν_σ 集中在 Lebesgue 零集 F_σ 上。令 $H_1=\{f, f\in H_\sigma$ 且当 $e^{i\theta}\in F_\sigma$ 时，$f(e^{i\theta})=0\}$。则必有 $H_1\neq\{0\}$。不妨设 $\varepsilon_1=-1$，则 H_1 必是 T_1 的约化子空间，且 T_1 在 H_1 上是正常的。事实上，若 $\sigma'=(-\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$，则 $T_1H_\sigma\subset H_\sigma\oplus H_{\sigma'}$。但 σ' 中只有 k 个 ε_j 为 -1，故 $\mu_{\sigma'}$ 是 Lebesgue 测度，于是 $T_1H_1\subset H_1$。但此时必有 $T_1|_{H_1}=\widehat{U}_1\widehat{\beta}_1$ 是正常，此与 T_1 的完全非正常性矛盾的。

由于 μ_σ 都是 Lebesgue 测度，令 $\Omega=(T^n,\mathscr{B},m)$，$R(\cdot)=\oplus R_\sigma(\cdot)$，$D=\oplus D_\sigma$，$\boldsymbol{B}_j$ 在 $\widehat{R}(L^2(\Omega)\otimes D)$ 上有意义，且 (3.1) 式成立。

类似于重交换的半亚正常算子组，亦有

定理2.4 若 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是重交换的亚正常算子组，而且是完全非正常的，则必有 $\widetilde{H}=\widehat{R}(L^2(\Omega)\otimes D)$，其中 $\Omega=(\Delta,\mathscr{B},m)$，$\Delta=\Delta_1\times\cdots\times\Delta_n$，$\Delta_j=\sigma(ReT_j)$，$H$ 到 $\widetilde{H}$ 上的酉算子 W，可测算子值函数 $\alpha_j(\cdot)$，$\beta_j(\cdot)$ 满足 §1 定理1.6 中 (6.1)～(6.6) 各式，并且 $\alpha_k(\cdot)$，$\beta_k(\cdot)$，$(k\neq j)$，限制在 $\overline{\widehat{\alpha_j}H}$ 上是与 x_j 无关的，使 $WT_jW^{-1}=\widehat{x}_j+i(\widehat{\alpha_j}\boldsymbol{P}_j\widehat{\alpha_j}+\widehat{\beta_j})$，$j=1,\cdots,n$。

现在我们可以证明以下定理。

定理 2.5 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是重交换的亚正常算子组，$D(T)$ 是 T 的 Mosiac 函数的本性支集，则 $D(T)\subset S_p(T)$，且当 T 是完全非正常时，$D(T)=S_p(T)$。

证 只须证明 T 是完全非正常的情况。由第四章定理 5.2，只要证明 $D(T)=\bigcup\limits_{k\in I^n}S_p(T^k)$，其中 $T^k=(T_1^k,\cdots,T_n^k)$，设 $x^0+iy^0=(x_1^0+iy_1^0,\cdots,x_n^0+iy_n^0)\overline{\in}\bigcup S_p(T^k)$。则有 $\varepsilon>0$，使 $\inf\limits_{|y-y^0|<\varepsilon}\operatorname{dist}(x^0+iy^0,\bigcup S_p(T^k))=\delta>0$。这样对任意 $k=(k_1,\cdots,k_n)\in I^n$，$\operatorname{dist}(x^0+iy^0,S_p(T^k))\geqslant\delta$。易知 T 取定理 2.4 函数模型的形式时候，$T^k=(\widehat{x_1}+$

$k_1(\widehat{\alpha_1^2}+\widehat{\beta_1}),\cdots,\widehat{x_n}+ik_n(\widehat{\alpha_n^2}+\widehat{\beta_n}))$。由引理2.2，对任意$f\in D$和几乎处处$x$，

$$\sum\|((x_j^0+iy_j-T_j^k(x))f\|^2\geqslant\delta^2\|f\|^2,$$

因此当$|x-x^0|<\frac{\delta}{4}$时，

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\|(y_j-\beta_j(x)-k_j\alpha_j^2(x))f\|^2\\ \geqslant&\sum_{j=1}^{n}\|(x_j^0+iy_j-T_j^k(x))f\|^2-|x-x^0|\,\|f\|^2\\ \geqslant&\frac{\delta^2}{4}\|f\|^2。\end{aligned}$$

设$G=\{x+iy,\ |y-y^0|<\frac{\delta}{2},|x-x^0|<\varepsilon\}$，则当$x+iy\in G$时，$\sum_{j=1}^{n}(y_j-\beta_j(x)-k_j\alpha_j^2(x))$是可逆的，且$\|(\sum(y_j-\beta_j(x)-k_j\alpha_j^2(x))^{-1}\|\leqslant\frac{2}{\delta}$。这样当$y\in S_p(Y)$时，$x\longmapsto\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^2$是$S_p(Y)$上的有界连续函数，由（2.2）式

$$\begin{aligned}&\int\frac{B(x,y)}{\sum|x_j-y_j|^2}dy\\ &=\alpha(x)\int(\sum(y_j-\beta_j(x)-k_j\alpha_j^2(x))^{-1}dk\alpha(x),\end{aligned}$$

这样当$x+iy\in G$时，

$$\begin{aligned}&\left\|\int\frac{B(x,y)}{\sum|x_j-y_j|^2}dy\right\|\\ &=\left|\alpha(x)\int(\sum(y_j-\beta_j(x)-k_j\alpha_j^2(x))^{-1}ak\alpha(x)\right|\\ &\leqslant M\cdot\frac{2}{\delta},\end{aligned}$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in\Delta}\|\alpha(x)\|^2$。

设 $G_1=\left\{y,\ |y-y^0|<\frac{\delta}{2}\right\}$，则对任意 $f\in D$，

$$\int_{G_1}\int\frac{\langle B(x,y)f,f\rangle}{\sum|t_j-y_j|^2}dt\,dy=\iint_{G_1}\frac{\langle B(x,y)f,f\rangle}{\sum|t_j-y_j|^2}dy\,dt,$$

于是对几乎处处的 t，$B(x,y)f=0$。

由于 D 是可分的，于是 G 中除去一个 Lebesgue 零集外，$B(x,y)=0$，从而 $x^0+iy^0\bar{\in}D(T)$，即 $D(T)\subset S_p(T)$。

我们再来证明 $S_p(T)\subset D(T)$。

设 $x^0+iy^0\bar{\in}D(T)$，则存在 $\varepsilon>0$，使 $|x-x^0|<\varepsilon$，$|y-y^0_1|<\varepsilon$ 时，$B(x,y)=0$。记 $D_1=\left\{x,|x-x^0|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$和$D_2=\{z,\ z\in C^n$，$z_j\neq\bar{z}_j$，且 $|\mathrm{Re}z-y^0|<\frac{\varepsilon}{2}\Big\}$。则存在 $M_1<\infty$，使

$$\sup_{(x,z)\in D_1\times D_2}\left\|\int\frac{B(x,y)}{\sum|y_j-z_j|^2}dy\right\|<M_1,$$

即

$$\left\|\alpha(x)\int(\sum|k_j\alpha_j^2(x)+\beta_j(x)-z_j|^2)^{-1}dk\alpha(x)\right\|<M_1.$$

设 $k_j\alpha_j^2(x)+\beta_j(x)$ 的谱测度为 $F_j(x_j,k_j,w_j)$，乘积谱测度为 $F(x,k,w)$。设 $G=\left\{z,\ z\in C^n,\ |\mathrm{Re}z-y^0|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$。把 G 看作 $2n$ 维实空间的子集，dz 是 $2n$ 维空间上的 Lebesgue 测度，则对每个 $f\in D$，

$$\int_G\int_{I^n}\int_{R^n}\frac{d\langle F(w)\alpha(x)f,\alpha(x)f\rangle}{\sum|w_j-z_j|^2}dk\,dz<MN,$$

其中 N 为 G 的 Lebesgue 测度。

设$\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$在单位球上稠密，则有 $E_p\subset I^n$，使 $m(I^n\backslash E_p)=0$，

而当 $k\in E_p$ 时，

$$\int_G\int_{R^n}\frac{d\langle F(w)\alpha(x)f_p,\alpha(x)f_p\rangle}{\sum|w_j-z_j|^2}dz<\infty。$$

记$D_3=\left\{w,\ |w-y_t|<\frac{\varepsilon}{4}\right\}$。则当 $w\in D_3$时，

$$\int_G\frac{dz}{\sum|w_j-z_j|^2}=\infty。$$

因此，对测度μ：$E\to\langle F(E)\alpha(x)f,\ \alpha(x)f\rangle$的一个零集外，$F(D_3)\alpha(x)=0$。这样 $F(x,k,w)$在 D_3 中与 w 无关。设 $\xi(x)=F(x,k)$，则 $\xi(x)$是具有投影算子值的可测函数，且 $\alpha(x)\xi(x)=\xi(x)\alpha(x)=0$。我们来证明 $\xi(x)=0$。设 $A_2(x)=\alpha_2(x)\cdots\alpha_n(x)\xi(x)$。若$A_2(x)\neq 0$，则 $\alpha_1(x)$与 $A_2(x)$交换，因此$\widehat{A_2}\overline{H}$ 是T_1 的约化子空间，并且 T_1 在 $\widehat{A_2}H$ 上是正常的，此与 T 的完全非正常性相矛盾的。因此 $A_2(x)=0$。用归纳法可逐步得到 $\xi(x)=0$。这样，当 $(x,k)\in D_1\times E$ 时，

$$D_3\cap S_p(k_1\alpha_1^2(x)+\beta_1(x),\cdots,k_n\alpha_n^2(x)+\beta_n(x))=\phi,$$

特别地有 $x^0+iy^0\in\bigcup_{k\in E}S_p(T^k)$。于是 $D(T)\supset\bigcup S_p(T^k)$。但谱具有上半连续性，而 E 在 I^n 中稠密，则必有 $D(T)\supset\bigcup_{k\in E}S_p(T^k)=\bigcup_{k\in I^n}\sigma(T^k)$。事实上由于$D(T)$是闭的，故$D(T)=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$，其中 G_n是开集，于是对每个$k\in I^n$，$S_p(T^k)\subset G_n$，于是$S_p(T^k)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=D(T)$。

推论2.6 若 T 是完全非正常的亚正常算子组，$z\in S_p(T)$，则对任意 $\delta>0$，$S_p(T)\cap\{w,|w-z|<\delta\}$ 的 Lebesgue 测度大于 0。

证明 若 $S_p(T)\cap\{w,|w-z|<\delta\}$测度为 0，则由 $D(T)$的定义知 $B(x,y)$在 z 的邻域中几乎处处为零，与 $z\in S_p(T)=D(T)$相矛盾。

推论2.7 若T是完全非正常的亚正常算子组，则$S_p(T)$不可能含有实维数低于$2n$的暴露面，即不存在$z\in C^n$的邻域$O_\varepsilon(z)$，使$O_\varepsilon(z)\cap S_p(T)$的几何维数低于$2^n$。

推论2.8 若T是重交换的亚正常算子组，且$m(S_p(T))=0$，则$H=\bigoplus_{j=1}^{n}H_j$，H_j是T的约化子空间，而T_j限制在H_j是正常的。

定理2.9 设T是重交换的亚正常算子组，则

$$\left\|\prod_{j=1}^{n}[T_j^*,T_j]\right\|\leqslant\left(\frac{1}{\pi}\right)^n m(S_p(T)),$$

其中$[T_j^*,T_j]=T_j^*T_j-T_jT_j^*$，$j=1,\cdots,n$。

证 不妨设T是完全非正常的，且取函数模型的形式。$\widehat{P}_j$是H上的算子，$(\widehat{P}_j f)(x)=\frac{1}{\pi}\int f(x)dx_j$，则$[T_j^*,T_j]=\frac{1}{\pi}\widehat{\alpha_j}\widehat{P}_j\widehat{\alpha_j}$，$j=1,\cdots,n$。由于$\alpha_j(\cdot)$在$\overline{\prod_{k\neq j}\widehat{\alpha_k}H}$上仅与$x_j$有关，因此$\prod_{j=1}^{n}[T_j^*,T_j]=\left(\frac{1}{\pi}\right)^n\prod_{j=1}^{n}\widehat{\alpha_j}\widehat{P}_j\widehat{\alpha_j}=\left(\frac{1}{\pi}\right)\widehat{\alpha}\widehat{P}_0\widehat{\alpha_j}$，其中$\widehat{P}_0=\prod_{j=1}^{n}\widehat{P}_j$。由于$f_a(\cdot)=a(\cdot)a$形式的向量在$\overline{\widehat{\alpha}H}$中稠密，故只要算出

$$\sup\frac{\left\langle\prod_{j=1}^{n}[T_j^*,T_j]f_a,\ f_a\right\rangle}{\langle f_a,f_a\rangle}$$

即可。以下证明与夏道行［19］相同，略去。

同样可以定义半亚正常算子组的Mosiac函数$B(r,\ e^{i\theta})$，从而导出相应的Putnam不等式等定理。由于篇幅所限，结论和证明都略去。

§3 Principal函数和迹公式

本节我们将定义亚正常算子组的Principal函数，并导出迹

公式。

定义3.1 设 $B(x,y)$，$B(r,e^{i\theta})$分别是亚正常算子组和半亚正常算子组的 Mosiac 函数，定义 $g(x,y)=\mathrm{tr}_D B(x,y)$，$g^P(r,e^{i\theta})=\mathrm{tr}_D B(r,e^{i\theta})$分别为亚正常算子组的和半亚正常算子组的Principal函数。

易证以下命题。

命题3.2 若重交换的亚正常算子组 T 与 S 酉等价，即有酉算子 U，使 $U^*T_jU=S_j, j=1,\cdots,n$。则 $g_T(x,y)=g_S(x,y)$。

若 $\prod\limits_{j=1}^{n}[T_j^*,T_j]$是迹类算子，我们称 T 是联合近似正常的。

命题 3.3 若 T 是重交换的亚正常算子组，且是联合近似正常的，则对任意 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$，只要$\bar{\lambda}_j\neq\lambda_j$，$\bar{\mu}_j\neq\mu_j$，$j=1,\cdots,n$，则有

$$\mathrm{tr}\prod_{j=1}^{n}[(X_j-\lambda_j)^{-1},\ (Y_j-\mu_j)^{-1}]=$$

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(x_j-\lambda_j)^2}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(y_j-\mu_j)^2}g(x,y)dxdy。$$

证 由于 $B(x,y)\geqslant 0$，得

$$\int\frac{g(x,y)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(y_j-\mu_j)^2}dy=\int\frac{\sum\limits_k\langle B(x,y)e_k,e_k\rangle}{\prod\limits_{j=1}^{n}(y_j-\mu_j)^2}dy$$

$$=\sum\int\frac{\langle B(x,y)e_k,e_k\rangle}{\prod\limits_{j=1}^{n}(y_j-\mu_j)^2}=\mathrm{tr}_D\int\frac{B(x,y)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(y_j-\mu_j)^2}dy,$$

其中 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是 D 上的完备就范直交系。

由于夏道行［19］，

$$\mathrm{tr}_D\int\frac{B(x,y)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(y_j-\mu_j)^2}dy$$

$$=\mathrm{tr}_D\int a(x)\prod_{j=1}^{n}(\beta_j(x)+k_j\alpha_j^2(x)-\mu_j)^{-2}a(x)dk$$

$$=\int \mathrm{tr}_D a(x)\prod_{j=1}^{n}(\beta_j(x)+k_j\alpha_j^2(x)-\mu_j)^{-2}a(x)dk$$

$$=\int \mathrm{tr}_D \prod_{j=1}^{n}(\beta_j(x)+k_j\alpha_j^2(x)-\mu_j)^{-1}\alpha^2(x)$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{n}(\beta_j(x)+k_j\alpha_j^2(x)-\mu_j)^{-1}dk$$

$$=\mathrm{tr}_D\int\prod_{j=1}^{n}([(\beta_j(x)+k_j\alpha_j^2(x)-\mu_j)^{-1}\alpha_j^2(x)(\beta_j(x)+k_j\alpha_j^2(x)-\mu_j)^{-1}]dk$$

$$=\mathrm{tr}_D\prod_{j=1}^{n}((\mu_j-\beta_j(x)-\alpha_j^2(x))^{-1}-(\mu_j-\beta_j(x))^{-1})。$$

记$\overline{Y}_j=(\mu_j-Y_j)^{-1}$，$\overline{T}_j=X_j+i\overline{Y}_j$，$j=1,\cdots,n$。则$\overline{T}=(\overline{T}_1,\cdots,\overline{T}_n)$仍是重交换的亚正常算子组，并且$\overline{T}_j=\widehat{x_j}+i\widehat{\overline{\alpha}_j}P_j\widehat{\overline{\alpha}_j}+\widehat{\beta_j}$，其中$\overline{\alpha}_j^2=(\mu_j-\beta_j-\alpha_j)^2-(\mu_j-\beta_j)^{-1}$。

于是
$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int\frac{1}{\pi(x_j-\lambda_j)^2}\frac{1}{\pi(y_j-\mu_j)^2}g(x,y)dxdy$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int\mathrm{tr}_D\overline{\alpha}^2(x)\frac{1}{\pi(x_j-\lambda_j)^2}dx。$$

另一方面，直接计算得

$$\left\langle\prod_{j=1}^{n}[(X_j-\lambda_j)^{-1},(Y_j-\mu_j)^{-1}f,f\right\rangle$$

$$=\int\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j-x_j)(\lambda_j-y_j)}\langle\overline{\alpha}(x)f(x),\overline{\alpha}(y)f(y)\rangle dxdy$$

$$=\left\|\int\frac{\overline{\alpha}(x)f(x)}{\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j-x_j)}dx\right\|^2$$

若记 Q 是满足 $\langle Qf, f\rangle = \left\|\int \frac{\bar{\alpha}(x)f(x)}{\Pi(\lambda_j - x_j)}dx\right\|^2$ 的正算子，经计算可得 $\mathrm{tr}Q = \int \mathrm{tr}_D\bar{\alpha}^2(x)\frac{1}{\pi(\lambda_j - x_j)^2}dx$.

这样 $\mathrm{tr}\Pi[(\lambda_j - x_j)^{-1}, (\mu_j - Y_j)^{-1}]$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \mathrm{tr}Q$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \mathrm{tr}_D\bar{\alpha}^2(x)\frac{1}{\Pi(\lambda_j - x_j)^2}dx。$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(x_j - \lambda_j)^2(y_j - \mu_j)^2}g(x, y)dydx。$$ 证毕。

引理 3.4 若 T 是联合近似正常的，则对任意二元多项式 $P_1, Q_1, \cdots, P_n, Q_n$，$\prod\limits_{j=1}^{n}[P_j(X_j, Y_j), Q_j(X_j, Y_j)]$ 是迹类算子，并且 $\mathrm{tr}\prod\limits_{j=1}^{n}[P_j, Q_j]$ 仅与 Jacobi 行列式 $J(P_1, Q_1, \cdots, P_n, Q_n)$ 有关而与 X_j, Y_j 的乘法顺序无关。

证 为简便起见，只证 $n=2$ 的情况。第一个结论是容易验证的。事实上 $[X_1^m Y_1^n, X_1^s Y_1^t] = X_1^m[Y_1^n, X_1^s]Y_1^t + X_1^s[X_1^m, Y_1^t]Y_1^n$，而 $[X_1^n, Y_1^m] = \sum\limits_{j=0}^{n} X_1^j[X_1, Y_1^m]X_1^{n-j-1}$，$[X_1, Y_1^m] = \sum\limits_{j=0}^{m} Y_1^j[X_1, Y_1]Y_1^{m-j-1}$，于是 $[X_1^m Y_1^{n_1}, X_1^{s_1}Y_1^{t_1}][X_2^{m_2}Y_2^{n_2}, X_2^{s_2}Y_2^{t_2}]$ 总是 $M_1[X_1, Y_1][X_2, Y_2]M_2$ 形式之和。由条件可知 $[X_1^{m_1}Y_1^{n_1}, X_1^{s_1}Y_1^{t_1}][X_2^{m_2}Y_2^{n_2}, X_2^{s_2}Y_2^{t_2}]$ 是迹类算子。

要证明迹与乘法的顺序无关，只须证明当 $P_1 = X_1^m Y_1^n$，$P'_1 = X_1^{m-1}Y_1X_1Y_1^{n-1}$ 时，$\mathrm{tr}[P_1, Q_1][P_2, Q_2] = \mathrm{tr}[P'_1, Q_1][P_2, Q_2]$。

$\mathrm{tr}[X_1^m Y_1^n, Q_1(X_1, Y_1)][P_2(X_2, Y_2), Q_2(x_2, Y_2)]$

$= \mathrm{tr}[X_1^{m-1}Y_1X_1Y_1^{n-1}, Q_1][P_2, Q_2] + \mathrm{tr}[X_1^{m-1}[X_1, Y_1]Y_1^{n-1}, Q_1]$

$\cdot[P_2,Q_2]$

$=\mathrm{tr}[P^1,Q_1][P_2,Q_2]$。

当固定 P_2、Q_2 时，$(P_1,Q_1)\longrightarrow \mathrm{tr}\,[P_1,Q_1][P_2,Q_2]$ 满足折叠性，于是由夏道行[19]知，$\mathrm{tr}[P_1,Q_1][P_2,Q_2]$ 仅与 $J(P_1,Q_1)$ 有关。同样在固定 P_1、Q_1 时，迹仅与 $J(P_2, Q_2)$ 有关。于是迹仅与 $J(P_1, Q_1,P_2,Q_2)$ 有关。证毕。

定理3.5 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是重交换的亚正常算子组，且还是联合近似正常的，则对任何二元多项式 $P_1,Q_1,\cdots,P_n,Q_n$，

$$\mathrm{tr}\prod_{j=1}^{n}[P_j,Q_j]=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int J(P_1,Q_1,\cdots,P_n,Q_n)g(x,y)dxdy。$$

证 由命题3.3，取 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ 充分大，则

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int\frac{g(x,y)}{\prod_{j=1}^{n}(x_j-\lambda_j)^2(y_j-\lambda_j)^2}dxdy$$

$$=\mathrm{tr}\prod_{j=1}^{n}[(\lambda_j-x_j)^{-1},(\mu_j-Y_j)^{-1}]$$

$$=\mathrm{tr}\prod_{j=1}^{n}(\mu_j-Y_j)^{-1}(\lambda_j-X_j)^{-2}(\mu_j-Y_j)^{-1}[X_j,Y_j]。$$

比较展开后的幂级数的系数得

$$\mathrm{tr}[X_1^{m_1},Y_1^{n_1}]\cdots[X_n^{m_n},Y_n^{n_n}]$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int J(P_1,Q_1,\cdots,P_n,Q_n)g(x,y)dxdy。$$证毕。

还可以把定理 3.5 推广到更广泛的一类函数：$C_0^\infty(R^{2n})$。

设 $f\in C_0^\infty(R^{2n}),x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n),s=(s_1,\cdots,s_n)$ $t=(t_1,\cdots,t_n),\widehat{f(x,y)}=\int e^{it\cdot x+is\cdot y}f(t,s)dtds$ 是 f 的富氏变换。$T=(X_1+iY_1,\cdots,X_n+iY_n)$ 是重交换的亚正常算子组，E_x 是 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的谱测度，E_y 是 $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 的谱测度，定义

$$f(X,Y)=\int e^{it\cdot X}e^{is\cdot Y}\widehat{f}(x,y)dxdy,$$

其中 $t\cdot X=t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_nX_2, s\cdot Y=s_1Y_1+\cdots+s_nY_n$。

证　把 $e^{it\cdot X}, e^{is\cdot Y}$ 按幂级数展开，把 $\prod_{j=1}^{n}[e^{it_jX_j}, e^{is_jY_j}]$ 也展开。注意级数不仅按范数收敛，而且也按迹范数收敛，于是用定理 3.5 得

$$\mathrm{tr}\prod_{j=1}^{n}[e^{it_jX_j}e^{is_jY_j}, e^{iu_jX_j}e^{iv_jY_j}]$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int J(e^{it_1x_1}, e^{is_1y_1},\cdots, e^{iu_jx_j}, e^{iv_jy_j})g(x,y)dxdy,$$

这样 $\mathrm{tr}\prod_{j=1}^{n}[f_j(X_j,Y_j), g_j(X_j,Y_j))$

$$=\mathrm{tr}\int\prod_{j=1}^{n}[e^{it_jX_j}e^{is_jY_j}, e^{iu_jX_j}e^{iv_jY_j}]\prod_{j=1}^{n}\widehat{f_j}\,\widehat{g_j}\,dxdy$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\iiint J(e^{it_1x_1}e^{is_1y_1},\cdots, e^{iu_nx_n}e^{iv_ny_n})g(x,y)dtds$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{n}\widehat{f_j}\,\widehat{g_j}\,dxdy$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int\prod_{j=1}^{n}(it_j\cdot iv_j-is_j\cdot iu_j)e^{it\cdot x}e^{is\cdot y}\widehat{f_j}\,\widehat{g_j}\,dtdsg(x,y)dxdy$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int J(f_1,g_1,\cdots,f_n,g_n)g(x,y)\,dxdy。$$证毕。

定理3.7　$T=(U_1|T_1|,\cdots,U_n|T_n|)$ 是重交换的半亚正常算子组，则当 $f_j, g_j\in C_0^\infty(R^2)$ 时，

$$\mathrm{tr}\prod_{j=1}^{n}[f_j(|T_j|,U_j), g_j(|T_j|,U_j)]$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int J_p(f_1,g_1,\cdots,f_n,g_n)g(r,e^{i\theta})drd\theta。$$

此题的证明与亚正常算子组证明相仿，故略去。

§4 指标

本节我们将证明重交换的亚正常算子组可以扩张为重交换的半亚正常算子组，并且证明二者的 Principal 函数是一致的。从而证明了在 Fredholm 点上的 Principal 函数值正是算子组的指标。为此还需要以下的扩张定理。

引理 4.1 $U=(U_1,\cdots,U_n)$ 是H上重交换的部分等距算子组，则必 Hilbert 空间 $K\supset H$，和 K 上交换的酉算子$\widehat{U}=(\widehat{U}_1,\cdots,\widehat{U}_n)$ 使得对任意整数 $k_j, j=1,\cdots,n, P_H\widehat{U}_1^{k_1}\cdots\widehat{U}_n^{k_n}|_H=U_1^{[k_1]}\cdots U_n^{[k_n]}$，其中 $k_j<0$ 时，$U_j^{[k_j]}=U_j^{-k_j*}, k_j\geqslant 0$ 时 $U_j^{[k_j]}=U_j^{k_j}$。

引理4.2 $T=(T_1,\cdots,T_n)$是重交换的亚正常算子组，$T_j=U_j|T_j|$是极分解。$\widehat{U}$是 U 的酉扩张，则$|T_j|$可延拓为 k 上的正算子$\widehat{|T_j|}$，使 $\widehat{T}=(\widehat{U}_1\widehat{|T_1|},\cdots,\widehat{U}_n\widehat{|T_n|})$是 k 上重交换的半亚正常算子组，且$P_H(\widehat{T}_j^*\widehat{T}_j-\widehat{T}_j\widehat{T}_j^*)|_H=T_j^*T_j-T_jT_j^*, j=1,\cdots,n$。

以上引理证明与单个算子类似，只要令$\widehat{T}_j=T_j\oplus 0$ 就可。

定理4.3 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是重交换的亚正常算子组，$\widehat{T}=(\widehat{T}_1,\cdots,\widehat{T}_n)$是由引理4.2得到的重交换的半亚正常算子组，若$x+iy=(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)=(r_1e^{i\theta_1},\cdots,r_ne^{i\theta_n})=(re^{i\theta})$，则$g_T(x,y)=g_{\widehat{T}}(re^{i\theta})$几乎处处成立。

证　为简便起见，只证 $n=2$ 的情况。

设 P_jQ_j 是二元多项式，由定理 3.5，

$$\operatorname{tr}[P_1(X_1+iY_1,X_1^2+Y_1^2),Q_1(X_1-iY_1,X_1^2+Y_1^2)][P_2(X_2+iY_2,X_2^2+Y_2^2),Q_2(X_2-iY_2,X_2^2+Y_2^2)]$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int J(P_1,Q_1,P_2,Q_2)g(x,y)dxdy$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\frac{\partial(P_1,Q_1,P_2,Q_2)}{\partial(\theta_1,r_1,\theta_2,r_2)}\cdot\frac{\partial(\theta_1,r_1,\theta_2,r_2)}{\partial(x_1,y_1,x_2,y)}$$

$$\cdot g(re^{i\theta})r_1r_2drd\theta。$$

取 $P_1=X_1^{n_1}Y_1^{m_1},Q_1=X_1^{t_1}Y_1^{s_1},P_2=X_2^{n_2}Y_2^{m_2},Q_2=X_2^{t_2}Y_2^{s_2}$代入上式，

$$=\left(\frac{1}{\pi}\right)^2\int(n_1s_1+n_1t_1+s_1m_1)(n_2s_2+n_2t_2+s_2m_2)r_1^{n_1+s_1+2m_1+2t_1-1}$$

$$\cdot r_2^{n_2+s_2+2m_2+2t_2-1}e^{i(n_1-s_1)\theta_1}e^{i(n_2-s_2)}g(re^{i\theta})drd\theta,$$

由于 $(T_1^*T_1-(X_1^2+Y_1^2))(T_2^*T_2-(X_2^2+Y_2^2))$ 是迹类算子，与引理 3.4 一样可以证明用 $T_1^*T_1,T_2^*T_2$ 代替 $X_1^2+Y_1^2,X_2^2+Y_2^2$ 迹不变。

$$\operatorname{tr}[P_1(X_1+iY_1,X_1^2+Y_1^2),Q_1(X_1-iY_1,X_1^2+Y_1^2)][P_2(X_2+iY_2,X_2^2+Y_2^2),Q_2(X_2-iY_2,X_2^2+Y_2^2)]$$

$$=\operatorname{tr}[P_1(T_1,T_1^*T_1),Q_1(T_1^*,T_1^*T_1)][P_2(T_2,T_2^*T_2),Q_2(T_2^*,T_2^*T_2)]$$

$$=\operatorname{tr}[P_1(\widehat{U}_1|\widehat{T}_1|,|\widehat{T}_1|^2),Q_1(|\widehat{T}_1|\widehat{U}_1^*,|\widehat{T}_1|^2)][P_2(\widehat{U}_2|\widehat{T}_2|,|\widehat{T}_2|^2),Q_2(|\widehat{T}_2|\widehat{U}_2^*,|\widehat{T}_2|^2)]。$$

用重交换的半亚正常算子组的迹公式（定理3.7），上式

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\frac{\partial(P_1,Q_1,P_2,Q_2)}{\partial(\theta_1,r_1,\theta_2,r_2)}g^P(re^{i\theta})drd\theta$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\right)^2\int(n_1s_1+n_1t_1+s_1m_1)(n_2s_2+n_2t_2+s_2m_2)\cdot r_1^{n_1+s_1+2m_1+2t_1-1}$$

$$r_2^{n_2+s_2+2m_2+2t_2-1}e^{i(n_1-s_1)\theta_1}e^{i(n_2-s_2)\theta_2}g^Pdrd\theta,$$

于是对任意的非负整数 $m_j,s_j,n_j,t_j,j=1,2,$

$$\int(n_1s_1+n_1t_1+s_1m_1)(n_2s_2+n_2t_2+s_2m_2)\cdot r_1^{n_1+s_1+2m_1+2s_1-1}$$

$$r_2^{n_2+s_2+2m_2+2s_2-1}e^{i(n_1-s_1)\theta_1}e^{i(n_2-s_2)\theta_2}(g-g^P)drd\theta=0。$$

取 $t_1=t_2=0$ 得

$$\int r_1^{s_1+n_1+2m_1} r_2^{s_2+n_2+2m_2} \int e^{i(n_1-s_1)\theta_1} e^{i(n_2-s_2)\theta_2} (g-g^P)\, d\theta dr = 0,$$

由 n_1, s_1, n_2, s_2 的任意性知

$g(x,y)=g^P(re^{i\theta})$ 几乎处处成立，证毕。

命题4.4 若 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是重交换的亚正常算子组，而且是联合近似正常的，$f_j\in C_0^\infty([0,\infty)), j=1,\cdots,n, g^P$ 是$\widehat{T}$的Principle 函数，则

$$\mathrm{tr}\left(\prod_{j=1}^n (f_j(T_j^*T_j)-f_j(T_jT_j^*))\right)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int \prod_{j=1}^n \frac{df_j}{dx_j} g^P(re^{i\theta})\, d\theta dr。$$

证 显然 $\mathrm{tr}\prod_{j=1}^n (f_j(\widehat{T}_j^*\widehat{T}_j)-f_j(\widehat{T}_j\widehat{T}_j^*))=\mathrm{tr}\prod_{j=1}^n (f_j(T_j^*T_j)-f_j(T_jT_j^*))$但$\widehat{U}_j\widehat{T}_j^*\widehat{T}_j\widehat{U}_j^*=\widehat{T}_j\widehat{T}_j^*$，故对任意多项式 P，$\widehat{U}_jP(\widehat{T}_j^*\widehat{T}_j)\widehat{U}_j^*=P(\widehat{T}_j\widehat{T}_j^*)$，于是对$f\in C_0^\infty([0,\infty))$，亦有$\widehat{U}_jf(\widehat{T}_j^*\widehat{T}_j)\widehat{U}_j^*=f(\widehat{T}_j\widehat{T}_j^*)$，

这样

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\prod_{j=1}^n (f_j(T_j^*T_j)-f_j(T_jT_j^*))\\
&=\mathrm{tr}\prod_{j=1}^n (f_j(\widehat{T}_j^*\widehat{T}_j)-\widehat{U}_jf_j(\widehat{T}_j\widehat{T}_j^*)\widehat{U}_j^*)\\
&=\mathrm{tr}\prod_{j=1}^n [f_j^{\frac{1}{2}}(\widehat{T}_j^*\widehat{T}_j)\widehat{U}_j^*, \widehat{U}_jf_j^{\frac{1}{2}}(\widehat{T}_j^*\widehat{T}_j)]\\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\prod_{j=1}^n \frac{df_j}{dx_j} g^P(re^{i\theta})\, drd\theta。
\end{aligned}$$

证毕。

引理4.5 若 T 如定理 3.5，$0\in S_{pe}(T)$，则存在 $\varepsilon>0$，使得任意 $f:\{1,\cdots,n\}\longrightarrow\{1,*\}$，$E_1^{f(1)}(0,\varepsilon]\cdots E_n^{f(n)}(0,\varepsilon]=0$，其中 E_j^1 为 $T_j^*T_j$ 的谱测度，E_j^* 为 $T_jT_j^*$ 的谱测度。

证 因 T 是 Fredholm 算子组，对任意 f，$\sum T_j^{f(i)}(T_j^*)^{f(i)}$ 是 Fredholm 算子（第一章§6推论 6.5）。但 $\sum A_j^*A_j$ 形式的算子是 Fredholm算子的充要条件是存在某$\varepsilon>0$，使 $\prod_{j=1}^n F_j(0,\varepsilon]=0$，其中

F_j 是 $A_j^* A_j$ 的谱测度。证毕。

引理4.6 T 如定理 3.5，则

$$\mathrm{Ind}T=\mathrm{tr}\left[\sum_k(-1)^{k+1}\prod_{j=1}^n E_j^{f(j)}(0,\varepsilon)\right]。$$

证 由第一章 §6 推论6.5

$$\mathrm{Ind}T=\sum(-1)^{k+1}\sum_{f\in I_k}\dim(\bigcap\ker T_j^{f(j)})]$$

$$=\mathrm{tr}\left[\sum(-1)^{k+1}\prod_{j=1}^n E_j^{f(j)}(0,\varepsilon)\right]。$$

定理4.7 T 如定理 3.5，$z=(z_1,\cdots,z_n)\bar{\in}\sigma_e(T)$，则 $g(x,y)=\mathrm{Ind}(T-Z)$ 几乎处处成立，其中 $z=(z_1,\cdots,z_n)=(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)=x+iy$。

证 不妨设 $z=(0,\cdots,0)$，

由引理 4.5，存在 $\varepsilon>0$，使 $\prod_{j=1}^n E_j^{f(j)}(0,\varepsilon]=0$。

设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in(0,\varepsilon]\times\cdots\times(0,\varepsilon]$，$\delta_j>0,\delta'_j>0$，$j=1,\cdots,n$。

设 f_j 是 R^1 上的函数：$f_j(x)=1$，$x<\lambda_j-\delta_j$ 时；$f_j(x)=\dfrac{\lambda_j+\delta_j-x}{\delta_j+\delta'_j}$，$\lambda_j-\delta_j\leqslant x\leqslant\lambda_j+\delta'_j$；$f_j(x)=0$，$x>\lambda_j+\delta'_j$，$j=1,\cdots n$。

由于 $\prod_{j=1}^n E_j^{f(j)}(0,\varepsilon]=0$，故有 $f_j^{(k)}\in C_0^\infty$，$f_j^{(k)}\to f_j$，$(f_j^{(k)})'\to f'_j$，且 $\{(f_j^{(k)})'\}$ 还是一致有界的，这样 $\prod_{j=1}^n f_j(T_j^{f(j)})T_j^{*})^{f(j)})=\prod_{j=1}^n f_j^{(k)}(T_j^{f(j)}(T_j^*)^{f(j)})$，于是

$$\mathrm{tr}\prod_{j=1}^n(f_j(T_j^*T_j)-f_j(T_jT_j^*))$$

$$=\mathrm{tr}\prod_{j=1}^n(f_j^{(k)}(T_j^*T_j)-f_j^{(k)}(T_jT_j^*))$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int\prod_{j=1}^n(f_j^{(k)})'dr\int g^P(re^{i\theta})d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{\lambda_1-\delta'}^{\lambda_1+\delta'_1}\cdots\int_{\lambda_n-\delta_n}^{\lambda_n+\delta'_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\delta_j+\delta'_j}g^P(re^{i\theta})d\theta。$$

令 $\delta_j,\delta'_j\to 0$，则极限几乎处处等于$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int g^P(re^{i\theta})d\theta$。

但另一方面 $\mathrm{tr}\prod_{j=1}^{n}(f_j(T_j^*T_j)-f_j(T_jT_j^*))=\mathrm{tr}\prod_{j=1}^{n}(E_j[0,\varepsilon]-E_j^*[0,\varepsilon])=\mathrm{Ind}T$)，这样对几乎处处的 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$|\lambda_j|<\varepsilon$，有 $g^P(\lambda)=\mathrm{Ind}T$。定理证毕。

推论4.8 T 如定理 3.5，$z\in C^n$，若 z 的任意邻域中 $g(z)$ 不几乎处处为常数，必有 $z\in S_{p,}(T)$。特别地有 $\mathrm{Bd}S_p(T)\subset S_{p,}(T)$。

§5 联合谱与公共约化子空间

根据算子谱来寻找算子的不变子空间或约化子空间是算子谱论中的一种方法。对于算子组来说，我们证明了以下的定理。

定理5.1 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是重交换的亚正常算子组，若 $S_p(T)\neq S_p(T_1)\times\cdots\times S_p(T_n)$，则 T 必有公共的约化子空间，或者说若 T 不可约，则必有 $S_p(T)=S_p(T_1)\times\cdots\times S_p(T_n)$。

证 显然可以不妨设 T 是完全非正常的，于是 T 可以取定理 2.3 之形式。

假设 $S_p(T)\neq S_p(T_1)\times\cdots\times S_p(T_n)$。于是有 $x_j^0+iy_j^0\in\sigma(T_j)$，$j=1,\cdots,n$ 但 $x^0+iy^0=(x_1^0+iy_1^0,\cdots,x_n^0+iy_n^0)\in S_p(T)=D(T)$。这样存在 $e>0$，使 $|x-x^0|<\varepsilon$，$|y-y^0|<\varepsilon$ 时，$B(x,y)=0$。如同定理 2.5 的后一部分证明一样得到 $\alpha(x)\xi(x)=\xi(x)\alpha(x)=0$。但 $\xi(x)=\xi_1(x_1)\cdots\xi_n(x_n)$，$\xi_j(x_j)=F(x_j,k_j)$。我们来证明必有某 j，使 $\widehat{\eta_j}\widehat{\alpha_j}=0$，其中 $\eta_j(x)=x_{G_1}\xi_j(x)$，而 x_{G_1} 是 G_1 的特征函数，G_1 如定理2.5。

若$\widehat{\eta_1}\widehat{\alpha_1}\neq 0$，则含 $\widehat{\eta_1}H$ 的T_1的最小约化子空间H_1也必为$T_2,\cdots,$

T_n 的约化子空间。则由 T 的不可约性得到 $H_1=H$，且 $\widehat{\eta_2}\widehat{\alpha_2}\cdots\widehat{\eta_n}\widehat{\alpha_n}=0$。类似又可得到要么 $\widehat{\eta_2}\widehat{\alpha_2}=0$，要么 $\widehat{\eta_3}\widehat{\alpha_3}\cdots\widehat{\eta_n}\widehat{\alpha_n}=0$，一直推得 $\widehat{\eta_n}\widehat{\alpha_n}=0$。

这样我们可假定 $\widehat{\eta_1}\widehat{\alpha_1}=0$。但此时必有 $\widehat{\eta_1}=0$，否则在 $\widehat{\eta_1}H$ 上，$T_j=\widehat{x_j}+i\widehat{\beta_j}$ 是正常的，与 T 的完全非正常性相矛盾。但 $\widehat{\eta_j}=0$ 又可得到对几乎处处的 $y_j\in\left(y_j^0-\frac{\varepsilon}{4},\ y_j^0+\frac{\varepsilon}{4}\right)$，必有 $y_j\overline{\in}\sigma(k_j\alpha_j^2(x)+\beta_j(x))$，特别地 y_j^0 与 $\sigma(k_j\alpha_j^2(x)+\beta_j(x))$ 的距离大于 $\varepsilon/4$。

这样对固定的 $k=(k_1,\cdots,k_n)$，有 j，使若 $y_j\in\left(y_j^0-\frac{\varepsilon}{4},y_j^0+\frac{\varepsilon}{4}\right)$ 就有 y_j 与 $\sigma(k_j\alpha_j^2(x)+\beta_j(x))$ 的距离大于 $\varepsilon/4$。我们来证明对某固定 j_0 和稠子集 $E\subset I$，使得任意 $k_j\in E$，y_{j_0} 与 $\sigma(k_{j_0}\alpha_{j_0}^2(x)+\beta_j(x))$ 的距离大于 $\varepsilon/4$，由 E 的稠密性可知 $x_{j_0}^0+iy_{j_0}^0$ 与

$\sigma(\widehat{x_j}+i(k_j\widehat{\alpha_j}+\widehat{\beta_j}))$ 的距离大于 $\varepsilon/4$，从而 $x_{j_0}+iy_0\overline{\in}\sigma(T_{j_0})$。事实上，若对每个 j，都有某开集 $V_j\subset I$，使每个 $k_j\in V_j$，y_j^0 与 $\sigma(k_j\widehat{\alpha_j^2}+\widehat{\beta_j})$ 距离小于 $\varepsilon/4$，这样在 $V=V_1\times\cdots\times V_n$ 上就不存在 j，使 y_j^0 与 $\sigma(k_j\widehat{\alpha_j^2}+\widehat{\beta_j})$ 距离大于 $\varepsilon/4$，这与已证明的结论相矛盾。定理证毕。

推论5.2 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是重交换的亚正常算子组，并且 $\prod\limits_{j=1}^{n}[T_j^*,T_j]$ 是紧算子，则存在分解

$H=K_n\oplus K_{n-1}\oplus\cdots\oplus K_1\oplus H_1\oplus H_2\oplus\cdots$　　使得

(1) 每个 j，H_j，K_j 约化 T；

(2) $T_j|K_j$ 是正常的，$j=1,\cdots,n$；

(3) $T|H_j$ 是不可约的；

(4) $S_p(T)=\bigcup_{j=1}^{n}S_p(T|H_j)$

$$\bigcup\overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\sigma(T_1|H_j)\times\cdots\times\sigma(T_n|H_j)\right)}。$$

证明　设 $T_1,\cdots,T_n$, I 生成的 C^* 代数为 $C^*(T)$, $J=C^*(T)\cap K(H)$。其中 $K(H)$ 是 H 上的紧算子理想。由条件 $\prod_{j=1}^{n}[T_j^*,T_j]\in J$，这样 $\overline{\text{Span}[JH]}$ 是$C^*(T)$约化子空间。记$[JH]^\perp=H_0$，则H_0 约化 T。$\text{Im}\prod_{j=1}^{n}[T_j^*|_{H_0},T_j|_{H_0}]\subset\text{Im}\prod_{j=1}^{n}[T_j^*,T_j]\subset JH=H_0^\perp$。这样 $\prod_{j=1}^{n}[T_j^*|_{H_0},T_j|_{H_0}]=0$，这样 H_0 可以分解为 $H_0=K_1\oplus K_2\oplus\cdots\oplus K_n$，使 K_j 是 T 的约化子空间，而且 $T_j|K_j$ 是正常的，$j=1,\cdots,n$。

由 C^* 代数理论（如[84]），$H_0^\perp=H_1\oplus H_2\oplus\cdots$，使每个 H_k 都约化 J，且 $J|_{H_k}=K(H_k)$。又由 $H_k=\overline{\text{span}(K(H_k)H_k)}=\overline{\text{Span}JH_k}$ 而 J 是 $C^*(T)$ 的理想，因此 H_k 约化T。易知，$C^*(T)|_{H_k}$ 是由 $(T_1|_{H_k},\cdots,T_n|_{H_k})$ 生成的 C^* 代数，这样由 $K(H_k)=J|_{H_k}$ 又得到 $C^*(T|_{H_k})\supset J|_{H_k}=K(H_k)$，即包含 $T|_{H_k}$的最小弱闭 C^* 代数就是 $L(H_k)$，从而 $T|_{H_k}$是不可约的。

由定理5.1和重交换的性质得到 $S_p(T|_{H_0^\perp})=\overline{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}S_p(T|_{H_k})\right)}$

$=\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\sigma(T_1|_{H_k})\times\cdots\times\sigma(T_n|_{H_k})}$。证毕。

第六章　算子张量积的联合谱、联合本质谱和指标

算子张量积的联合谱是联合谱中的重要内容。我们将在本章中导出在各种条件下算子张量积的联合谱、联合本质谱和指标公式。

§1　Banach 空间上算子的张量积

我们在第一章中已对 Banach 空间的张量积有了定义（见第一章 §1）。若 $A\in L(X), B\in L(Y)$，定义 A 与 B 的张量积 $A\otimes B$ 为：$(A\otimes B)(x\otimes y)=Ax\otimes By$，其中 $x\in X, y\in Y$。由于 $x\otimes y$ 形式的向量的线性和在 $X\otimes Y$ 中稠密，$A\otimes B$ 可以延拓到 $X\otimes Y$ 上。我们有以下引理。

引理 1.1　设 $A\in L(X), B\in L(Y)$，则 $A\otimes B\in L(X\hat{\otimes}Y)$，且 $\|A\otimes B\|=\|A\|\|B\|$，其中 $X\otimes Y$ 中范数由第一章（1.1）定义。

证　设 $u\in X\otimes Y$，则

$$\begin{aligned}
&\|(A\otimes B)u\|\\
&=\inf\{\sum\|x_i\|\|y_i\|;(A\otimes B)u=\sum x_i\otimes y_i\}\\
&\leqslant\inf\{\sum\|Aw_i\|\|Bv_i\|;u=\sum w_i\otimes v_i\}\\
&\leqslant\|A\|\|B\|\|u\|,
\end{aligned}$$

因此 $\|A\otimes B\|\leqslant\|A\|\|B\|$。

反之，对任意 $\varepsilon>0$，取 $x\in X, y\in Y, \|x\|=\|y\|=1$，使 $\|Ax\|\geqslant\|A\|-\varepsilon$，$\|By\|\geqslant\|B\|-\varepsilon$，于是

$$\begin{aligned}
\|(A\otimes B)(x\otimes y)\|&=\|Ax\otimes By\|=\|Ax\|\|By\|\\
&\geqslant(\|A\|-\varepsilon)(\|B\|-\varepsilon)。
\end{aligned}$$

从而$\|A\otimes B\|\geqslant\|A\|\|B\|$，得$\|A\otimes B\|=\|A\|\|B\|$。证毕。

为证明张量积的联合谱，我们还需要以下引理。

引理 1.2 设$\widetilde{X}$是 X 中的稠密子空间，$\widetilde{Y}$是$\widetilde{X}$中的闭子空间，Y 是$\widetilde{Y}$在 X 中的闭包，$Y\subset X$，则有，$\overline{\widetilde{X}/\widetilde{Y}}=X/Y$，其中$\overline{\widetilde{X}/\widetilde{Y}}$是$\widetilde{X}/\widetilde{Y}$的完备化空间。

证 先证$\widetilde{X}/\widetilde{Y}$与$\widetilde{X}+Y/Y$是等距同构。

令$\widetilde{\pi}:\widetilde{X}\longrightarrow\widetilde{X}+Y/Y,x\longrightarrow x+Y$，则$\ker\widetilde{\pi}=\widetilde{Y}$，于是$\widetilde{\pi}$可导出一同构$\pi:\widetilde{X}/\widetilde{Y}\longrightarrow\widetilde{X}+Y/Y$，$x+\widetilde{Y}\longrightarrow x+Y$。

由于$\widetilde{Y}$在 Y 中稠密，因此

$$\begin{aligned}\|x+\widetilde{Y}\|&=\inf\{\|x+y\|;y\in\widetilde{Y}\}\\&=\inf\{\|x+y\|;y\in Y\}=\|x+Y\|,\end{aligned}$$

即$\widetilde{X}/\widetilde{Y}$与$\widetilde{X}+Y/Y$是等距同构的。

由于$\widetilde{X}+Y/Y$在 X/Y 中稠密，得$\overline{\widetilde{X}/\widetilde{Y}}=X/Y$。

引理1.3 设X,X',Y都是 Banach 空间，$A\in L(X,X')$，如果存在 $m>0$，使对每个$u\in(A\otimes I)(X\otimes Y)$，存在$v\in X\otimes Y$，使得$(A\otimes I)v=u$，且$\|u\|\geqslant m\|v\|$，则

$\mathrm{Ker}\,(A\otimes I)=\overline{\mathrm{Ker}A\otimes Y}=\mathrm{Ker}A\otimes Y$。

证 作商映射$\widetilde{A\otimes I}$：$X\otimes Y/\mathrm{Ker}A\otimes Y\longrightarrow X'\otimes Y$，若$[u]\in X\otimes Y/\mathrm{Ker}\,A\otimes Y$，$(\widetilde{A\otimes I})[u]=(A\otimes I)u$。由于$\mathrm{Ker}(A\otimes I)\cap X\otimes Y=\mathrm{Ker}A\otimes Y$，因此$\widetilde{A\otimes I}$在$X\otimes Y/\mathrm{Ker}A\otimes Y$上是单射。对$u\in(A\otimes I)(X\otimes Y)$，存在$v\in X\otimes Y$，使$(\widetilde{A\otimes I})[v]=(A\otimes I)v=u$，$\|u\|\geqslant m\|v\|\geqslant m\|v\|$，从而$\widetilde{A\otimes I}$在$X\otimes Y/\mathrm{Ker}A\otimes Y$上下有界，由此可得

$\widetilde{A}\widetilde{\otimes}I$在$X\widetilde{\otimes}Y/\overline{\mathrm{Ker}A\otimes Y}$上下有界。由引理1.2，$\widetilde{A}\widetilde{\otimes}I$在$X\otimes Y/\mathrm{Ker}A\otimes Y$上下有界，因而有$\mathrm{Ker}(A\otimes I)\subset\mathrm{Ker}A\widetilde{\otimes}Y$。$\mathrm{Ker}A\otimes Y\subset\mathrm{Ker}(A\otimes I)$是显然的，因此$\mathrm{Ker}(A\otimes I)=\mathrm{Ker}A\widehat{\otimes}Y$。

定理1.4 设X、Y是Banach空间，$A=(A_1,\cdots,A_n)$是X上的交换算子组，$\widehat{A}_i=A_i\otimes I\in L(X\widehat{\otimes}Y)$，$\widehat{A}=(\widehat{A}_1,\cdots,\widehat{A}_n)$，

$$S_p(\widehat{A},X\widehat{\otimes}Y)=S_p(A,X)。$$

证 设$\{E_p^n(X),d_p(A)\}$是A导出的Koszul复形。设A是正则的，则

$$0\longrightarrow E_0^n(X)\xrightarrow{d_0(A)}E_1^n(X)\xrightarrow{d_1(A)}\cdots\longrightarrow E_{n-1}^n(X)\xrightarrow{d_{n-1}(A)}E_n^n(X)\longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

正合。

由于Y是线性空间，由张量积定义

$$0\longrightarrow E_0^n(X)\otimes Y\xrightarrow{d_0(A)\otimes I}E_1^n(X)\otimes Y\longrightarrow\cdots\cdots\to E_{n-1}^n(X)\otimes Y$$
$$\xrightarrow{d_{n-1}(A)\otimes I}E_n^n(X)\otimes Y\longrightarrow 0 \quad (3.2)$$

正合。

要证

$$0\longrightarrow E_0^n(X)\widehat{\otimes}Y\xrightarrow{d_0(A)\otimes I}E_1^n(X)\widehat{\otimes}Y\longrightarrow\cdots\cdots E_{n-1}^n(X)\widehat{\otimes}Y$$
$$\xrightarrow{d_{n-1}(A)\otimes I}E_n^n(X)\widehat{\otimes}Y\longrightarrow 0 \quad (3.3)$$

正合。

由于$d_p(A)\otimes I(E_p^n(X)\otimes Y)=d_p(A)E_p^n(X)\otimes Y=\mathrm{Ker}d_{p+1}(A)\otimes Y$。由命题1.3，若证得存在$m>0$，使任给$u\in\mathrm{Im}d_p(A)\otimes Y$，有$u'\in E_p^n(X)\otimes Y$，使$(d_p(A)\otimes I)u'=u$，$\|u\|\geqslant m\|u'\|$，就可得到$\mathrm{Ker}(d_{p+1}(A)\otimes I)=\mathrm{Ker}d_{p+1}(A)\widehat{\otimes}Y$。又因为$\mathrm{Im}(d_p(A)\otimes I)\subset\mathrm{Im}d_p(A)\widehat{\otimes}Y$。根据命题，1.3$\mathrm{Im}(d_p(A)\otimes I)$闭。而$\mathrm{Im}(d_p(A))\otimes Y$在$\mathrm{Im}d_p(A)\otimes Y$中稠，从而有$\mathrm{Im}(d_p(A)\otimes I)=\mathrm{Im}d_p(A)\widehat{\otimes}Y=$

$\mathrm{Ker}d_{p+1}(A)\hat{\otimes}Y=\mathrm{Ker}(d_{p+1}(A)\otimes I)$。故只要证得上述事实，即可得（3.3）正合。

现证：任给 $p, 0\leqslant p\leqslant n$，存在 $m_p>0$，使对任意 $u\in \mathrm{Im}d_p\otimes Y$，有 $u'\in E_p^*(X)\otimes Y$，使 $(d_p(A)\otimes I)u'=u, \|u\|\geqslant m_p\|u'\|$。

当 $p=0$ 时，由于 $d_0(A)$ 是下有界的，存在 $m_0>0$，使 $u\in E_0^*(X), \|d_0(A)\ x\|\geqslant m_0\|u\|$。由（3.2）的正合性知 $d_0(A)\otimes I$ 在 $E_0^*(X)\otimes Y$ 上为单射。任取 $u\in E_0^*(X)\otimes Y$

$$
\begin{aligned}
\|(d_0(A)\otimes I)(u)\| &= \inf\{\sum\|w_i\|\|v_i\|; (d_0(A)\otimes I)u=\sum w_i\otimes v_i\}\\
&= \inf\{\sum\|d_0(A)x_i\|\|y_i\|; u=\sum x_i\otimes y_i\}\\
&\geqslant m_0\inf\{\sum\|x_i\|\|y_i\|; u=\sum x_i\otimes y_i\}\\
&= m_0\|u\|,
\end{aligned}
$$

因此 $\|(d_0(A)\otimes I)u\|\geqslant m_0\|u\|$。

由（3.1）式的正合性得

$$0\longrightarrow E_0^*(X)/\mathrm{Im}d_0(A)\xrightarrow{\overline{d_1(A)}}E_1^*(X)\longrightarrow\cdots\cdots\rightarrow E_n^*(X)\longrightarrow 0 \qquad (3.4)$$

正合。这里 $\overline{d_1(A)}$ 定义为 $\overline{d_1(A)}(u+\mathrm{Im}d_0(A))=d_1(A)u$。

根据以上对 $d_0(A)$ 的证明，知任给 $u\in \mathrm{Im}d_1(A)\otimes Y=\mathrm{Im}\,\overline{d_1(A)}\otimes Y$，存在唯一的 $[u']\in(E_1^*(X)/\mathrm{Im}d_0(A))\otimes Y$，使 $(d_0(A)\otimes I)[u']=u, \|u\|\geqslant m\|[u']\|$。

$$
\begin{aligned}
\|u\| &\geqslant m\|[u']\|\\
&= m\inf\{\sum\|x_i\|\|y_i\|; \|[u']\|=\sum[x_i]\otimes y_i\}\\
&\geqslant m\sum\|[x_i]\|\|y_i\|-\delta\\
&= m\sum\inf\{\|x_i+z_i\|; z_i\in\mathrm{Im}d_0(A)\}\cdot\|y_i\|-\delta\\
&\geqslant m\sum(\|x_i+z_i\|-\varepsilon)\|y_i\|-\delta\\
&= m\sum\|x_i+z_i\|\|y_i\|-(\varepsilon m\sum\|y_i\|+\delta)。
\end{aligned}
$$

先取 $\delta<\frac{m}{4}\|[u']\|$，固定 y_i，再取 $\varepsilon<\|[u']\|/4(\sum\|y_i\|+1)$，令 $u_1=\sum(x_i+z_i)\otimes y_i\in E_1^*(X)\otimes Y$。易知 $[u_1]=\sum[x_i]\otimes y_i=$

$[u']$，$\|u_1\| \geqslant \|[u_1]\| = \|[u']\|$。从而有

$$\|u\| \geqslant m\|u_1\| - (\varepsilon m \sum \|y_i\| + \delta) \geqslant m\|u_1\| - \frac{m}{2}\|[u']\| \geqslant \frac{m}{2}\|u_1\|。$$

而 $(d_1(A)\otimes I)u_1 = (\overline{d_1(A)}\otimes I)[u'] = u$，故 $d_1(A)\otimes I$ 也具有我们需要的性质。

反复使用这个方法，可得对所有 p，$d_p(A)\otimes I$ 都具有我们所需要的性质。从而（3.3）正合。

反之，设 $\widehat{A}$ 正则，由张量积性质，知 $d_p(\widehat{A}) = d_p(A)\otimes I$。于是（3.3）正合。现证（3.1）式正合。

由于 $\mathrm{Ker}(d_p(A)\otimes I) = \mathrm{Im}(d_{p-1}\otimes I) = \overline{\mathrm{Im}d_{p-1}(A)}\widehat{\otimes}Y \subset \mathrm{Ker}\, d_p(A)\widehat{\otimes}Y \subset \mathrm{Ker}(d_p(A)\otimes I)$，因此 $\mathrm{Ker}(d_p(A)\otimes I) = \mathrm{Ker}d_p(A)\ \widehat{\otimes}\ Y$，$0 \leqslant p \leqslant n-1$。容易看出，$\mathrm{Im}d_p(A)$ 在 $\mathrm{Ker}d_{p+1}(A)$ 中稠，只须证明 $\mathrm{Im}d_p(A)$ 闭。

当 $p=0$ 时，$d_0(A)\otimes I$ 下有界，对 $x\otimes y \in X\otimes Y$，$\|d_0(A)\otimes I(x\otimes y)\| = \|d_0(A)x\|\,\|y\| \geqslant m\|x\|\,\|y\|$，故 $\|d_0(A)x\| \geqslant m\|x\|$，因此 $d_0(A)$ 下有界，$\mathrm{Im}d_0(A) = \mathrm{Ker}d_1(A)$。作商空间及商映射：

$$\overline{d_1(A)}: E_1^n(X)/\mathrm{Im}d_0(A) \longrightarrow E_2^n(X),\quad [u] \longmapsto d_1(A)u,$$

$\overline{d_1(A)}$ 为单射，$\mathrm{Im}\overline{d_1(A)} = \mathrm{Im}d_1(A)$。要证 $\mathrm{Im}\,\overline{d_1(A)}$ 闭。

若 $\overline{d_1(A)}$ 下方无界，则存在 $\{[u_n]\} \subset E_1^n(X)/\mathrm{Im}d_0(A)$，$\|[u_n]\| = 1$，$\overline{d'(A)}[u_n] = d_1(A)u_n \to 0$。取 $\widetilde{f_n} \in (E_1^n(X)/\mathrm{Im}d_0(A))^*$，使 $\widetilde{f_n}([u_n]) = f_n(u_n) = 1$，其中 $f_n \in (\mathrm{Im}d_0(A))^\perp$，$\|\widetilde{f_n}\| = \|f_n\| = 1$。

任取 $g \in Y^*$，定义 $f_n\widetilde{\otimes}g \in (E_1^n(X)\widehat{\otimes}Y/\mathrm{Im}d_0(A)\otimes Y)^*$，

$(f_n\widetilde{\otimes}g)([u]) = (f_n\otimes g(u)$，$[u] \in (E_1^n(X)\widehat{\otimes}Y/\mathrm{Im}d_0(A)\otimes Y)$。

对 $y\in Y$，$\|y\|=1$，取 $g\in Y^*$，$g(y)=1$。$[u_n\otimes y]\in E_1^*(X)\widehat{\otimes}Y/\mathrm{Im}d_0(A)\otimes 1$，$f_n\widetilde{\otimes}g([u_n\otimes y])=f_n(u_n)=1$。由于 $\|f_n\widetilde{\otimes}g\|=\|f_n\otimes g\|=\|f_n\|\ \|g\|=\|g\|$，所以存在 $\eta>0$，使 $\|[u_n\otimes y]\|\geqslant\eta$。由（3.3）正合知 $\overline{d_1(A)\otimes 1}$ 下有界。这里 $\overline{d_1(A)\otimes 1}$：$E_1^*(X)\widehat{\otimes}Y/\mathrm{Im}d_0(A)\widehat{\otimes}Y\longrightarrow E_2^*(X)\widehat{\otimes}Y$ 是由 $d_1(A)\otimes I$ 导出的商映射。但

$\overline{d_1(A)\otimes I}([u_n\otimes y])=d_1(A)u_n\otimes y\longrightarrow 0$，矛盾。

因此 $d_1(A)$ 的值域是闭的。

利用同样的方法可证，对 $p\geqslant 2$，$d_p(A)$ 的值域闭，故（3.1）正合，A 正则。

到此为止，我们证明了 $S_p(\hat{A},X\otimes Y)=S_p(A,X)$，

以下我们假定 X_i，$i=1,2,\cdots,n$，都是 Banach 空间，$X=X_1\otimes\cdots\otimes X_n$，$T_i\in L(X_i)$，$i=1,\cdots,n$，令 $\hat{T}_i=I\otimes\cdots\otimes T_i\otimes\cdots\otimes I$，$i=1,\cdots,n$，$\hat{T}=(\hat{T}_1,\cdots,\hat{T}_n)$。

定理1.4 T，$\hat{T}$ 如上，则

$$S_p(\hat{T},X)=S_p(T_1,X_1)\times\cdots\times S_p(T_n,X_n)。$$

证　设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(T_1)\times\cdots\times S_p(T_n)$，则必有某 $\lambda_k\in S_p(T_k)$。但由定理1.3，$\lambda_k\in S_p(\hat{T}_k)$。又由联合谱投影定理（第二章定理4.5），从而入 $\lambda\in S_p(\hat{T})$。

反之，设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(\hat{T})$，我们来证必有某 k，使得 $\lambda_k\in S_p(T_k)$。我们用数学归纳法进行证明。$n=1$ 没什么可证的。因此我们假定定理在 $n-1$ 时是成立的，并且 $\lambda=(0,\cdots,0)$。

先证有某 k，使 T_k 满射。

若对每个 k，T_k 不满射，则必有 $\varphi_k^{(m)}\in X_k^*$，$\|\varphi_k^{(m)}\|=1$，使得 $T_k^*\varphi_k^{(m)}\to 0,(m\to\infty,k=1,2,\cdots n)$。这样 $\varphi_1^{(m)}\otimes\cdots\otimes\varphi_n^{(m)}\in X^*$，且

$\|\varphi^{(m)}\|=1$, $\widehat{T}_i^*\varphi^{(m)}\to 0$, 与$(0,\cdots,0)\overline{\in}S_p(\widehat{T})=S_p(\widehat{T}^*)$矛盾。

不妨 T_1 是满射，若 T_1 不是单射，设 $x\in\operatorname{Ker}T_1$, $x\neq 0$。由归纳假定 $\widetilde{T}=(T_2\otimes\cdots\otimes I,\cdots,I\otimes\cdots\otimes T_n)=(\widetilde{T}_2,\cdots,\widetilde{T}_n)$ 是奇异的，于是必有某 p，使得 $\operatorname{Ker}\widetilde{d}_p/\operatorname{Im}\widetilde{d}_{p-1}\neq\{0\}$，其中$\{\widetilde{d}_p\}$是$\widetilde{T}$导出的边界算子。设$\xi=\sum\xi_{j_1\cdots j_p}S_{j_1}\wedge\cdots\wedge S_{j_p}\in\operatorname{Ker}\widetilde{d}_p$，令 $x\otimes\xi=\sum x\otimes\xi_{j_1\cdots j_p}S_{j_1}\wedge\cdots\wedge S_{j_p}$，则 $d_p(x\otimes\xi)=(\widehat{T}_1xS_1)\otimes\xi+x\otimes\widetilde{d}_p\xi=0$，由于$\widehat{T}$是正则的，因此必有 $\eta\in E_{p-1}^n(X)$，使 $d_p\eta=x\otimes\xi$。

但 $x\otimes\xi$ 中不定元无 S_1，于是 $x\otimes\xi=(\widehat{T}_2S_2+\cdots+\widehat{T}_nS_n)\eta$。取 $\varphi\in X_1^*$, $\varphi(x)=1$，于是

$$
\begin{aligned}
\xi&=(\varphi\otimes I\otimes\cdots\otimes I)(x\otimes\xi)\\
&=(\varphi\otimes I\otimes\cdots\otimes I)(\widehat{T}_2S_2+\cdots+\widehat{T}_nS_n)\eta\\
&=(\varphi\otimes I\otimes\cdots\otimes I)(I\otimes\widetilde{T}_2S_2+\cdots+I\otimes\widetilde{T}_n)\eta\\
&=(\widetilde{T}_2S_2+\cdots+\widetilde{T}_nS_n)(\varphi\otimes I\otimes\cdots\otimes I)\eta\\
&=\widetilde{d}_{p-1}(\varphi\otimes I\otimes\cdots\otimes I)\eta,
\end{aligned}
$$

此与 $\xi\overline{\in}\operatorname{Im}\widetilde{d}_{p-1}$ 矛盾。这样 T_1 既满射又单射，即 $0\overline{\in}S_p(T_1)$。证毕。

以下我们将导出 Banach 空间上算子张量积的联合本质谱公式。我们还需要以下引理。

引理1.5 设 $T\in L(X,Y)$，则 $\dim\operatorname{Ker}T=\infty$或 $\operatorname{Im}T$ 不闭的充要条件是存在有界但非全有界的叙列$\{x_n\}$，使 $Tx_n\to 0$。

证 若 $\dim\operatorname{Ker}T=\infty$，可取 $\operatorname{Ker}T$ 中任一有界但非全有界的叙列$\{x_n\}$，使 $Tx_n\equiv 0$。若 $\dim\operatorname{Ker}T<\infty$，而 $\operatorname{Im}T$ 不闭。设M是 X 的闭子空间，使 $M\dotplus\operatorname{Ker}T=X$。于是 $TM=TX$不闭。这样T在 M 上必不下有界。设$\{x_n\}\subset M$, $\|x_n\|=1$, $Tx_n\to 0$。则$\{x_n\}$必然

不是全有界的，因为否则必有 $x_{n_k}\to x_0$，于是 $Tx_0=\lim Tx_{n_k}=0$，$x_0\in \mathrm{Ker}T\cap M=\{0\}$，与 $\|x_0\|=\lim\|x_{n_k}\|=1$ 矛盾。

若有不是全有界的叙列$\{x_n\}$，使 $Tx_n\to 0$，而 $\dim\mathrm{Ker}T<\infty$，M 如前，P 是 M 的平行投影。则$\{Px_n\}$必不是全有界的。事实上由于$(1-P)x_n\in\mathrm{Ker}T$，从而$\{(1-P)x_n\}$是全有界的。若$\{Px_n\}$也全有界，必然使$\{x_n\}$也全有界。又 $TPx_n=Tx_n\to 0$，T在 M 上单射又不下有界得 $TX=TM$ 不是闭的。证毕。

引理1.6 $T\in L(X)$，T 是 Fredholm 算子，则 $\mathrm{Ker}(T\otimes I)=\mathrm{Ker}T\widehat{\otimes}Y$，$\mathrm{Im}(T\otimes I)=\mathrm{Im}T\widehat{\otimes}Y$。

证 由假定 $\dim\mathrm{Ker}T<\infty$。设 M 如引理1.5，$M+\mathrm{Ker}T=X$，由引理1只须证明 $T\otimes I$ 在 $M\otimes Y$ 上是下有界的，必有 $\mathrm{Ker}(T\otimes I)=\mathrm{Ker}T\widehat{\otimes}Y$。设 T 在 M 上的下界为 δ。

若 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i$，则

$$\begin{aligned}\|(T\otimes I)f\|&=\inf\{\sum\|u_i\|\|v_i\|;\sum u_i\otimes v_i=\sum Tx_i\otimes y_i\}\\&=\inf\{\sum\|Ta_i\|\|b_i\|;\sum a_i\otimes b_i=\sum x_i\otimes y_i\}\\&\geqslant\delta\inf\{\sum\|a_i\|\|b_i\|;\sum a_i\otimes b_i=\sum x_i\otimes y_i\}\\&=\delta\|f\|。\end{aligned}$$

另一方面，$\mathrm{Im}T\otimes Y\subset\mathrm{Im}(T\otimes I)\subset\mathrm{Im}T\widehat{\otimes}Y$ 是显然的，而 $T\otimes I$ 在 $M\otimes Y$ 上是下有界的，故等号成立。证毕。

定理1.7 T，$\widehat{T}$如定理1.4，则

$$S_{pe}(\widehat{T},X)=\bigcup_{j=1}^{n}S_p(T_1)\times\cdots\times S_{pe}(T_j)\times\cdots\times S_p(T_n)。$$

若 T_j 都是 Fredholm 算子时，$\mathrm{Ind}\widehat{T}=(-1)^{n-1}\prod\limits_{j=1}^{n}\mathrm{Ind}T_j$

证 (1) 先证若 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_{pe}(\widehat{T})$，则必有某$i$，使$T_i-\lambda_i$ 可逆，或对每个 i，$T_i-\lambda_i$ 都是 Fredholm 算子。不妨设 $\lambda=(0,\cdots,0)$。

若每个 T_i 都不可逆，我们假定 $T_1,\cdots,T_k$ 不是单射，而 $T_{k+1},\cdots,T_n$ 单射但不满射。$(0\leqslant k\leqslant n)$。

(a) 对每个 $i>k$，$\mathrm{Im}T_i$ 必然是闭的。否则不妨假定 T_{k+i} 单射且 $\mathrm{Im}T_{k+i}$ 是闭的，$i=1,\cdots,s$，而 T_{k+s+i} 单射但 $\mathrm{Im}T_{k+i+s}$ 不闭。由引理1.5，在 X_{k+s+i} 中有有界但非全有界的叙列 $\{z_i^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$，$i=1,2,\cdots,t$，使得 $T_{k+s+i}z_i^{(m)}\to 0,(m\to\infty)$。取 $x_i\in\mathrm{Ker}T_i$，$\|x_i\|=1$，$i=1,\cdots,k$，$x_{k+i}\in\mathrm{Im}T_{k+i}$，$\|x_{k+i}\|=1$，$i=1,\cdots,s$。记 $w_m=x_1\otimes\cdots\otimes x_{k+s}\otimes z_1^m\otimes\cdots\otimes z_t^m$ 则 $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ 中必有子叙列 $\{w_{m_j}\}$，使得 $\{w_{m_j}S_{k+1}\wedge\cdots\wedge S_{k+s}+\mathrm{Im}d_{s-1}\}$ 在 $E_s^s(X)/\mathrm{Im}d_{s-1}$ 中是有界的但非全有界的。

事实上，必有 $\delta>0$ 和子列 $\{z_i^m\}$，使得 $\mathrm{dist}(z_i^m,\ \mathrm{span}\{z_i^1,\cdots,z_i^{m-1}\})\geqslant\delta$。否则对每个 $\varepsilon>0$，有 $z_i^{\prime},\cdots,z_i^{p}$，使得任意 $z\in\{z_i^m\}_{m=1}^{\infty}$ $\mathrm{dist}(z,\mathrm{span}(z_i^{\prime},\cdots,z_i^{p}))<\varepsilon/2$。由于 $\{z_i^m\}_{m=1}^{\infty}$ 有界，$\mathrm{span}(z_i^{\prime},\cdots,z_i^{p})$ 是有限维的，不难得出 $\{z_i^m\}_{m=1}^{\infty}$ 存在有限 $\varepsilon-$ 网，与 $\{z_i^m\}$ 不是全有界的相矛盾。因此我们可以不妨设 $\{z_i^m\}$ 就是满足上述条件的子列。

任取 $m'<m$，设 $x_i^*\in X^*$，$\|x_i^*\|=1$，$x_i^*(x_i)=1$，$i=1,\cdots,k$，而 $x_{k+i}^*\in X_{k+i}^*$，$x_{k+i}^*(x_{k+i})=d_i=\mathrm{dist}(x_{k+i},\ \mathrm{Im}T_{k+i})$，而 x_{k+i}^* 在 $\mathrm{Im}T_{k+i}$ 上为零，$i=1,\cdots,s$。取 $z_i^*\in X_{k+s+i}^*$，$\|z_i^*\|=1$，$z_i^*(z_i^m)=\mathrm{dist}(z_i^m,\mathrm{span}(z_i^{\prime},\cdots,z_{m-1}^{\prime}))\geqslant\delta$，而 z_i^* 在 $\mathrm{span}(z_i^{\prime},\cdots,z_i^{m-1})=0$。令 $x^*=x_1^*\otimes\cdots\otimes x_{k+s}^*\otimes z_1^*\otimes\cdots\otimes z_t^*$，则 $x^*\in X^*$，且 $\|x^*\|=1$。由于

$$\mathrm{Im}d_{s-1}\subset\{\sum f_{j_1\cdots j_s}s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_s};\ f_{j_1\cdots j_s}\in\widehat{T_{j_1}}\widehat{X}+\cdots+\widehat{T_{j_s}}\widehat{X}\},$$

于是

$$\begin{aligned}&\|(w_m-w_{m'})s_{k+1}\wedge\cdots\wedge s_{k+s}+\mathrm{Im}d_{s-1}\|\\ \geqslant&\inf\{\|w_m-w_{m'}+\widehat{T}_{k+1}u_1+\cdots+\widehat{T}_{k+s}u_s\|;u_i\in X_{k+i},i=1,\cdots,s\},\end{aligned}$$

但是
$$\begin{aligned}&\|w_m-w_{m'}+\widehat{T}_{k+1}u_1+\cdots+\widehat{T}_{k+s}u_s\|\\ \geqslant&x^*(w_m-w_{m'}+\widehat{T}_{k+1}u_1+\cdots+\widehat{T}_{k+1}u_s)\\ \geqslant&d_1\cdots d_s\delta^s,\end{aligned}$$

于是$\{w_m s_{k+1}\wedge\cdots\wedge s_{k+s}+\mathrm{Im}d_{s-1}\}$的确不全有界。

记$E_s^n(X)/\mathrm{Im}d_{s-1}$到$\mathrm{Im}d_s$的映射：$f+\mathrm{Im}d_{s-1}\longrightarrow d_s f$为$\bar{d}$。则$\dim\ \mathrm{Ker}\,\bar{d}=\dim\ \mathrm{Ker}d_s/\mathrm{Im}d_{s-1}<\infty$，$\mathrm{Im}\bar{d}=\mathrm{Im}d_s$是闭的，但是，$\hat{\bar{d}}(w_m s_{k+1}\wedge\cdots\wedge s_{k+s}+\mathrm{Im}d_{s-1})\to 0$，$(m\to\infty)$，此与引理1.5矛盾。

(b) 对每个$i\geqslant k$，必有$\dim\ \mathrm{Ker}T_i<\infty$且$\mathrm{Im}T_i$闭。否则不妨设$\dim\ \mathrm{Ker}T_1=\infty$或$\mathrm{Im}T_1$不闭。则必有非全有界的叙列$\{z_m\}$，使$T_1 z_m\to 0$。取$x_{k+i}\bar{\in}\mathrm{Im}T_{k+i}$，$i=1,\cdots,n-s$，$x_i\in\mathrm{Ker}T_i$，$\|x_i\|=1$，$2\leqslant i\leqslant k$，令$w_m=z_m\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_n$，则用(a)的方法也可使$\{w_m s_{k+1}\wedge\cdots\wedge s_n+\mathrm{Im}d_{s-1}\}$非全有界，而$\hat{\bar{d}}(w_m s_{k+1}\wedge\cdots\wedge s_n+\mathrm{Im}d_{s-1}\}\to 0$，从而得到矛盾。

(c) 对每个$i\leqslant k$，$\dim X_i/\mathrm{Im}T_i<\infty$。否则不妨设$\dim X_1/\mathrm{Im}T_1=\infty$。取$\{x^m\}\subset X_1$，使$\{x^m+\mathrm{Im}T_1\}$线性无关，$x_i\in X_i$，$\|x_i\|=1$，$2\leqslant i\leqslant k$，使$\{w_m s_1\wedge s_{k+1}\wedge\cdots\wedge s_n+\mathrm{Im}d_s\}$在$\mathrm{Ker}d_{s+1}/\mathrm{Im}d_s$中线性无关，此与$\dim(\mathrm{Ker}d_{s+1}/\mathrm{Im}d_s)<\infty$矛盾。

(d) 若i满足$k<i\leqslant m$，则也有$\dim X_i/\mathrm{Ker}T_i<\infty$。否则不妨设$\dim X_{k+1}/\mathrm{Im}T_{k+1}=\infty$。取$\{x^m\}\subset X_{k+1}$，使$\{x^m+\mathrm{Im}T_{k+1}\}$线性无关，取$x_i\in\mathrm{Ker}T_i$，$i=1,\cdots,k$，$x_{k+i}\bar{\in}\mathrm{Im}T_{k+i}$，$2\leqslant i\leqslant n-k$，$w_m=x_1\otimes\cdots\otimes x_k\otimes x^m\otimes x_{k+1}\otimes\cdots\otimes x_n$，则$\{w_m s_{k+1}\wedge\cdots\wedge s_n+\mathrm{Im}d_{s-1}\}$在$\mathrm{Ker}d_s/\mathrm{Im}d_{s-1}$中线性无关，此与假设矛盾。

这样T_i都是Fredholm算子。

(2) 再证当$T_i-\lambda_i$都是Fredholm算子时，必有$\lambda\bar{\in}S_{p,}(\hat{T})$。仍可不妨设$\lambda=(0,\cdots,0)$。

设M_i是X_i中的闭子空间，$M_i\dotplus\mathrm{Ker}T_i=X_i$，$N_i$也是$X_i$中闭子空间，$\mathrm{Im}T_i\dotplus N_i=X_i$。记$\mathrm{Ker}T_i$和$N_i$对上述分解的平行投影为$P_i$和$Q_i$，$i=1,\cdots,n$。记

$H^p=\{\sum f_{j_1\cdots j_p}s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p};f_{j_1\cdots j_p}\in\hat{Q}_{j_1}\cdots\hat{Q}_{j_p}\hat{P}_{i_1}\cdots\hat{P}_{i_q}X\}$，其中$\{i_1,\cdots,i_q\}=\{1,\cdots,n\}\backslash\{j_1,\cdots,j_p\}$，

$K^p=\{\sum f_{j_1\cdots j_p}s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p};f_{j_1\cdots j_p}\in(I-\widehat{Q}_{j_1}\cdots\widehat{Q}_{j_p}\widehat{P}_{i_1}\cdots\widehat{P}_{i_q})X\}$。

显然 $H^p\dotplus K^p=E^n_p(X)$。

如果我们已经证明 $\mathrm{Ker}d_p\cap K^p\subset\mathrm{Im}d_{p-1}$，则由于 $H^p\subset\mathrm{Ker}d^p$，且 $H^p\cap\mathrm{Im}d_{p-1}=\{0\}$，则必有 $\mathrm{Ker}d_p\cap K^p=\mathrm{Im}d_{p-1}$，从而 $\mathrm{Im}d_{p-1}$ 是闭的，而且 $\mathrm{Ker}d_p/\mathrm{Im}d_p\cong H^p$ 是有限维的，即 $0\overline{\in}S_{pe}(\widehat{T})$。

用归纳法证明 $\mathrm{Ker}d_p\cap K^p\subset\mathrm{Im}d_{p-1}$。

$n=1$ 显然成立。假定 $n-1$ 时是对的，我们来证 n 也对。记 $E_1=\{\sum f_{j_1\cdots j_p}s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p};1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n-1\}$，$E_2=\{(\sum f_{j_1\cdots j_{p-1}}s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_{p-1}})\wedge s_n;1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{p-1}\leqslant n-1\}$。则在分解 $E^n_p(X)=E_1\oplus E_2$ 之下，

$$d_p=\begin{pmatrix}\widehat{d_p} & 0\\ \widehat{T}_nS_n & \widehat{d}_{p-1}\end{pmatrix},$$

其中 $\{\widehat{d_p}\}^{n-1}_{p=0}$ 是 $(\widehat{T}_1,\cdots,\widehat{T}_{n-1})$ 导出的边界算子。

设 $A\in L(X)$，$f=\sum f_{j_1\cdots j_p}s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\in E^n_p(X)$，记 $Af=\sum Af_{j_1\cdots j_p}s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}$。

若 $x\oplus(y\wedge s_n)\in\mathrm{Ker}d_p\cap K^p$，其中 $x\in E_1$，则 $d_p(x\oplus(y\wedge s_n))=0$。设 $Y=X_{n-1}\widehat{\otimes}\mathrm{Ker}T_n$，$\widetilde{T}_{n-1}=T_{n-1}\otimes I_{\mathrm{Ker}T_n}$，$\widetilde{X}=X_1\widehat{\otimes\cdots\otimes}X_{n-2}\otimes Y$，则 $\widetilde{T}=(T_1\otimes I\otimes\cdots\otimes I,\cdots,I\otimes\cdots\otimes I\otimes\widetilde{T}_{n-1})$ 是 $\widetilde{X}$ 上的交换算子组。记 $\tilde{d}_p$ 是 $\widetilde{T}$ 导出的边界算子，$\widetilde{K^p}$ 是相应的 K^p 空间。由于 $\mathrm{Ker}T_n$ 是有限维的，$\widetilde{T}_{n-1}$ 是 Y 上的 Fredholm 算子，并直接验证知 $\widetilde{P}_nx\in\widetilde{K^p}\cap\mathrm{Ker}\widetilde{d_p}$。由归纳假设，存在 $f\in E^{n-1}_{p-1}(\widetilde{X})$，使得 $\tilde{d}_pf=\widehat{P}_nx$。类似定义 $Z=X_{n-1}\widehat{\otimes}N_n$，$\widetilde{T}_{n-1}=T_{n-1}\otimes I_{N_n}$，$\widetilde{X}=X_1\widehat{\otimes\cdots\otimes}X_{n-2}\otimes Z$，可找到 $g\in E^{n-1}_{p-2}[\widetilde{X}]$，使 $\tilde{d}_{p-1}g=\widehat{Q}_ny$。但 f,g 也可以看作 $E(X)$ 中的向量，且 $\hat{d}^pf=\tilde{d}^pf$，$\hat{d}_{p-1}g=\tilde{d}^{p-1}g$，于是 $d_p(f\oplus(g\wedge s_n))=$

$\widehat{P}_n x\oplus(\widehat{Q}_n y\wedge S_n)$。

由引理1.6，存在$h\in E_p^{n-1}(X)$，使得$\widehat{T}_n h=\widehat{Q}_n y$且$\widehat{P}_n h=h$。因$d_p((1-\widehat{P}_n)x\oplus(1-\widehat{Q}_n)(y\wedge S_n))=0$可推得$((-1)^p\widehat{T}_n\widehat{P}_n x+\widehat{d}_{p-1}\widehat{T}_n h)\wedge s_n=0$，但$\widehat{T}_n\widehat{d}_{p-1}=\widehat{d}_{p-1}\widehat{T}_n$，$\widehat{T}_n$在$(1-\widehat{P}_n)X$上单射，因此$(-1)^p\widehat{P}_n x+\widehat{d}^{p-1}h=0$，即$d_p((-1)^{p+1}h\oplus 0)=((-1)^{p+1}\widehat{d}_{p-1}h\oplus(\widehat{T}_n s_n\wedge(-1)^{p+1}h)=(1-\widehat{P}_n)x\oplus(1-\widehat{Q}_n)y\wedge s_n$。这样$d_p(f\oplus g\wedge s_n+(-1)^{p+1}h\oplus 0)=\widehat{P}_n x\oplus(\widehat{Q}_n y\wedge s_n)+(1-\widehat{P}_n)x\oplus(1-\widehat{Q}_n y)\wedge s_n=x\oplus y\wedge s_n$。于是$\mathrm{Ker}d_p\cap K^p\subset\mathrm{Im}d_{p-1}$获证。

(3) 易知要证（3.1）式成立就是要证$\lambda\in S_{p_e}(\widehat{T})$的充分且必要条件是：存在某$i$，$T_i-\lambda_i$可逆或对每个$i$，$T_i-\lambda_i$是Fredholm算子，由于$T_i$是可逆时，$\widehat{T_i}$可逆，则$\widehat{T}$正则，更有$0\in S_{p_e}(\widehat{T})$，因此由（1）、（2）知，（3.1）成立。

当T_i都是Fredholm算子时，由（2），$\mathrm{Ker}d_p/\mathrm{Im}d_{p-1}\cong H^p$，因此

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ind}\widehat{T}&=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p+1}\dim\mathrm{Ker}d_p/\mathrm{Im}d_{p-1}\\
&=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p+1}\dim H^p\\
&=(-1)^{n-1}\sum_{p=0}^{n}\sum_{j_1\cdots j_p}\dim N_{j_1}\cdots\dim N_{j_p}\dim\mathrm{Ker}T_{i_1}\cdots\dim\mathrm{Ker}T_{i_s}\\
&=(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(\dim\mathrm{Ker}T_j-\dim N_j)\\
&=(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\mathrm{Ind}T_j。
\end{aligned}
$$

证毕。

§2 Hilbert空间上算子的张量积

在Hilbert空间上，算子张量积的联合谱，联合本质谱和指

标较 Banach 空间上的情况，有比较好的结果。

设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$和 $B=(B_1,\cdots,B_m)$分别是 Hilbert 空间 H 和 K 上的变换算子组。记$A\otimes I=(A_1\otimes I,\cdots,A_n\otimes I)$，$I\otimes B=(I\otimes B_1,\cdots,I\otimes B_m)$。记 $B'=(B_1,\cdots,B_{m-1})$。$A,B,B',(A\otimes I,I\otimes B),(A\otimes I,I\otimes B')$ 的边界算子分别为 $\{D_i\}_{i=0}^{n}$，$\{G_j\}_{j=0}^{m}$，$\{G'_j\}_{j=0}^{m-1}$，$\{H_k\}_{k=0}^{n+m}$，$\{H'_k\}_{k=0}^{m+n-1}$。同时为方便起见，把边界算子看成 Hilbert 空间直和上的算子。由于$\binom{m+n}{k}=\binom{n}{k}\binom{m}{0}+\binom{n}{k-1}\binom{m}{1}+\cdots+\binom{n}{k-m}\binom{m}{0}$。以所$H\otimes K\otimes C^{\binom{m+n}{k}}=\bigoplus\limits_{i=0}^{m}(H\otimes C^{\binom{n}{k-i}})\otimes(K\otimes C^{\binom{m}{i}})$　　(*)

其中 $k<0$ 或 $k>n$ 时，$\binom{n}{k}=0$。

引理2.1　$A,B,\{D_i\},\{G_j\},\{H_k\}$如上，则在*分解之下

(1)
$$H_k=\begin{bmatrix} D_k\otimes I & (-1)^{k+1}I\otimes G_1 & & \\ & D_{k-1}\otimes I & (-1)^{k}I\otimes G_2 & \\ & & \ddots & (-1)^{k-m+2}I\otimes G_m \\ & & & D_{k-m}\otimes I \end{bmatrix},\tag{1.1}$$

(2)
$$H_k^*H_k+H_{k+1}H_{k+1}^*=\bigoplus_{i+j=k}((D_i^*D_i+D_{i+1}D_{i+1}^*)\otimes I+I\otimes(G_j^*G_j+G_{j+1}G_{j+1}^*))。\tag{1.2}$$

证　(1) 对 m 归纳证明

$m=1$ 时，

$$H_k=\begin{bmatrix} D_k\otimes I & (-1)^{k+1}\mathrm{diag}(I\otimes B_1) \\ 0 & D_{k-1}\otimes I \end{bmatrix},$$

由于 $G_1=B_1$，$\mathrm{diag}(I\otimes B_1)=I\otimes G_1$，其中等式左边 I 为 H 上恒等算子，等式右边 I 为 $H\otimes C^{\binom{n}{k}}$ 上恒等算子。这样 (2.1) 成立。

设 $m-1$ 时(2.1)成立。则

$$
H_k = \begin{bmatrix} H'_k & (-1)^{k+1}\mathrm{diag}L\otimes B_m \\ 0 & H_{k-1} \end{bmatrix}
$$

$$
= \left[\begin{array}{ccccc:ccccc}
D_k\otimes I & (-1)^{k+1}I\otimes G'_1 & & & & (-1)^{k+1}I\otimes \mathrm{diag}B_m & & & & \\
 & D_{k-1}\otimes I & (-1)I\otimes G'_2 & & & & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & (-1)^{k-m+2}I\otimes G'_{m-1} & & & & & \\
 & & & & D_{k-m+1}\otimes I & & & & (-1)^{k+1}I\otimes \mathrm{diag}B_m & \\
\hdashline
 & & & & & D_{k-1}\otimes I & (-1)I_k\otimes G'_1 & & & \\
 & & & & & & D_{k-2}\otimes I & (-1)^{k-1}I\otimes G'_2 & & \\
 & & & & & & & \ddots & (-1)^{k-m+2}I\otimes G'_{m-1} & \\
 & & & & & & & & D_{k-m}\otimes I &
\end{array}\right]
$$

$$
= \begin{bmatrix}
D_k\otimes I & (-1)^{k+1}I\otimes G'_1 & (-1)^{k+1}\otimes \mathrm{diag}B_m & & & & \\
 & D_{k-1}\otimes I & & (-1)^k I\otimes G_2 & (-1)^{k+2}I\otimes \mathrm{diag}B_m & & \\
 & & D_{K-2}\otimes I & & (-1)^k I\otimes G'_1 & & \\
 & & & & & \ddots & (-1)^{k-2}I\otimes \mathrm{diag}B_m \\
 & & & & D_{k-m+1}\otimes I & & (-1)^{k-m+2}I\otimes G'_{m-1} \\
 & & & & & & D_{k-m}\otimes I
\end{bmatrix}
$$

以上等号是进行横列的变换以及空间的合并而得到的，其中I可以代表不同空间上的恒等算子。

(2) 直接用(1.1)计算可得。

引理2.2 设$A\in L(H), B\in L(K), A\geqslant 0, B\geqslant 0$，则

(1) $\operatorname{Ker}(A\otimes I+I\otimes B)=\operatorname{Ker}A\hat{\otimes}\operatorname{Ker}B$，

(2) $A\otimes I+I\otimes B$ 为 Fredholm 算子的充分且必要条件是满足下列条件之一：

(a) A 或 B 是可逆的，

(b) A 和 B 都是 Fredholm 算子。

证 (1) 若$f\in H\otimes K$，则

$$\|(A\otimes I+I\otimes B)f\|^2=\|(A\otimes I)f\|^2+\|(I\otimes B)f\|^2+2\|(A^{\frac{1}{2}}\otimes B^{\frac{1}{2}})f\|^2。\tag{2.1}$$

设$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$是H的完备就范直交基，其中$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$是$\operatorname{Ker}A$的完备就范直交基。$\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$是$K$的完备就范直交基，其中$\{y_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$是$\operatorname{Ker}B$的完备就范直交基。则$\{x_i\otimes y_j\}$是$H\otimes K$的完备就范直交基，而$\{x_{n_i}\otimes y_{n_j}\}$是$\operatorname{Ker}A\otimes\operatorname{Ker}B$的完备就范直交基。

设$f=\Sigma\lambda_{ij}x_i\otimes y_j\in\operatorname{Ker}(A\otimes I+I\otimes B)$，则由(2.1)得，$f\in\operatorname{Ker}(A\otimes I)\cap\operatorname{Ker}(I\otimes B)$。由$(A\otimes I)f=\Sigma\lambda_{ij}Ax_i\otimes y_j$知，对每个$j$ $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{ij}Ax_i=0$，因此$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{ij}x_i\in\operatorname{Ker}A$。于是当$i\overline{\in}\{n_i\}$时$\lambda_{ij}=0$。同样$i\overline{\in}\{n_j\}$时，$\lambda_{ij}=0$。这样$f=\Sigma\lambda_{n_i n_j}x_{n_i}\otimes y_{n_j}\in\operatorname{Ker}A\otimes\operatorname{Ker}B$。

而$\operatorname{Ker}A\otimes\operatorname{Ker}B\subset\operatorname{Ker}(A\otimes I+I\otimes B)$是显然的。

(2) 必要性。若$A\otimes I+I\otimes B$是 Fredholm 算子，但若A不是 Fredholn 算子，B不是可逆的，则有H中的直交单位向量$\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$使$Ax_p\to 0(p\to\infty)$。k中的单位向量$\{y_p\}_{p=1}^{\infty}$，$By_p\to 0, (p\to\infty)$。这样$\{x_p\otimes y_p\}_{p=1}^{\infty}$是$H\otimes K$中的直交单位向量，$(A\otimes I+I\otimes B)(x_p\otimes y_p)\to 0(p\to\infty)$，因此$A\otimes I+I\otimes B$不是 Fredholm 算子，矛盾。

同样也不可能 A 不可逆，B 不是 Fredholm 算子。

充分性。若 A 或 B 可逆，则易见 $A\otimes I\otimes I\otimes B$ 也可逆，则更是 Fredholm 算子。

若 $A\otimes B$ 都是 Fredholm 算子，则 $\dim\mathrm{Ker}A<\infty$，$\dim\mathrm{Ker}B<\infty$，且有 $\delta>0$，使 $x\in(\mathrm{Ker}A)^{\perp}$，$y\in(\mathrm{Ker}B)^{\perp}$ 时，$\|Ax\|\geqslant\delta\|x\|$，$\|By\|\geqslant\delta\|y\|$。

由(i) $\dim\mathrm{Ker}(A\otimes I+I\otimes B)=\dim(\mathrm{Ker}A\otimes\mathrm{Ker}B)=\dim\mathrm{Ker}A\cdot\dim\mathrm{Ker}B<\infty$

易知 $(\mathrm{Ker}A\otimes\mathrm{Ker}B)^{\perp}=(\mathrm{Ker}A)^{\perp}\otimes\mathrm{Ker}B\oplus\mathrm{Ker}A\otimes(\mathrm{Ker}B)^{\perp}\oplus(\mathrm{Ker}A)^{\perp}\otimes(\mathrm{Ker}B)^{\perp}$，且右边的每个直和因子都是 $A\otimes I+I\otimes B$ 的约化子空间。由于 A 在 $(\mathrm{Ker}A)^{\perp}$ 上下有界，B 在 $(\mathrm{Ker}B)^{\perp}$ 上下有界，于是 $A\otimes I+I\otimes B$ 在 $(\mathrm{Ker}A\otimes\mathrm{Ker}B)^{\perp}$ 上是下有界的。这样 $A\otimes I\otimes I\otimes B$ 是 Fredholm 算子。

有了以上引理，我们就有

定理2.3 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 和 $B=(B_1,\cdots,B_m)$ 分别是 Hilbert 空间 H 和 K 上的交换算子组，则

$$S_p(A\otimes I,I\otimes B)=S_p(A)\times S_p(B)。$$

证 只要证明 $(A\otimes I,I\otimes B)$ 正则的充要条件是 A 正则或 B 正则就可。

由 Curto [55]知，$(A\otimes I,I\otimes B)$ 可逆的充要条件是对每个 k，$H_k^*H_k+H_{k+1}H_{k+1}^*$ 可逆。但由引理 2.1 知此等价于：对任意 k，任意 $i+j=k$，$(D_i^*D_i+D_{i+1}D_{i+1}^*)\otimes I+I\otimes(G_j^*G_j+G_{j+1}G_{j+1}^*)$ 可逆。用引理 2.2 知，此等价于 $D_i^*D_i+D_{i+1}D_{i+1}^*$ 可逆或 $G_j^*G_j+G_{j+1}G_{j+1}^*$ 可逆。即等价于对每个 i，$D_i^*D_i+D_{i+1}D_{i+1}^*$ 可逆或者等价于每个 j，$G_j^*G_j+G_{j+1}G_{j+1}^*$ 可逆。这又等价于 A 可逆或者 B 可逆。证毕。

定理2.4 A、B 如定理 2.3，则

$$S_{pe}(A\otimes I,I\otimes B)=S_{pe}(A)\times S_p(B)\bigcup S_p(A)\times S_{pe}(B)。$$

并且当 A 和 B 都是 Fredholm 算子组时，Ind $(A\otimes I, I\otimes B)=-\mathrm{Ind}A\cdot\mathrm{Ind}B$。

证 同样只须证明 $(A\otimes I, I\otimes B)$ 是 Fredholm 算子组的充要条件是 A 或 B 中之一是正则的，或者 A 和 B 都是 Fredholm 算子组。

若 $(A\otimes I, I\otimes B)$ 是 Fredholm 算子组，则对每个 k，$H_k^*H_k+H_{k+1}H_{k+1}^*$ 是 Fredholm 算子。若 A 非 Fredholm，B 又非正则，则存在 i，使 $D_i^*D_i+D_{i+1}D_{i+1}^*$ 非 Fredholm 算子，$G_j^*G_j+G_{j+1}G_{j+1}^*$ 不可逆，于是由引理 2.2，$(D_i^*D_i+D_{i+1}D_{i+1}^*)\otimes I+I\otimes(G_jG_j^*+G_{j+1}G_{j+1}^*)$ 非 Fredholm，从而，$H_k^*H_k+H_{k+1}H_{k+1}^*$ 非 Fredholm 算子，其中 $k=i+j$。这样得到矛盾。同样也可不能 A 不正则而 B 非 Fredholm 算子组。

若 A、B 中之一是正则的，则 $(A\otimes I, I\otimes B)$ 是正则的，更是 Fredholm 的。

若 A,B 都是 Fredholm 算子组，则对每个 i,j，$D_i^*D_i+D_{i+1}D_{i+1}^*$ 和 $G_j^*G_j+G_{j+1}G_{j+1}^*$ 都是 Fredholm 算子，从而 $H_k^*H_k+H_{k+1}H_{k+1}^*$ 是 Fredholm 算子，从而由 Curto[55]，$(A\otimes I, I\otimes B)$ 是 Fredholm 算子组。

若 A,B 都是 Fredholm 算子组，则

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}(A\otimes I, I\otimes B)\\
&=\Sigma(-1)^{k+1}\dim(\mathrm{Ker}(H_k^*H_k+H_{k+1}H_{k+1}^*))\\
&=\Sigma(-1)^{k+1}\sum_{i+j=k}\dim\mathrm{Ker}(D_i^*D_i+D_{i+1}D_{i+1}^*)\cdot\dim\mathrm{Ker}(G_j^*G_j\\
&\qquad+G_{j+1}G_{j+1}^*)\\
&=-\Sigma(-1)^{i+1}\dim\mathrm{Ker}(D_i^*D_i+D_{i+1}D_{i+1}^*)\Sigma(-1)^{j+1}\\
&\qquad\dim\mathrm{Ker}(G_j^*G_j+G_{j+1}G_{j+1}^*)\\
&=-\mathrm{Ind}A\cdot\mathrm{Ind}B_{\circ}
\end{aligned}
$$

证毕。

§3 可解C*-代数的张量积

我们在这一节中在新的条件下把§2中的结论再作进一步的推广。

定义3.1[83] C^*代数$\mathscr{A}$称为可解的，是指存在

$\{0\}=\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}_1\subset\cdots\subset\mathscr{A}_{n+1}=\mathscr{A}$，满足：

(1) $\mathscr{A}_j$是$\mathscr{A}_{j+1}$中的闭理想；

(2) $\mathscr{A}_{j+1}/\mathscr{A}_j\cong C_0[X_j,K(H_j)]$，其中$X_j$是局部紧的拓扑空间，$K(H_j)$是Hilbert空间$H_j$上的紧算子理想，$C_0[X_j,K(H_j)]$是定义在$X_j$上的且在无穷远点为0的算子值的连续函数。$j=0,1,2,\cdots,n$；

(3) 记$d_j=\dim H_j$，则$d_{j+1}\geqslant d_j$；

(4) 存在*代数同态S_j：$\mathscr{A}\to C[X,L(H_j)]$，使得$\mathrm{Ker}S_j=\mathscr{A}_j$，$j=1,2,\cdots,n+1$。$S_j$称为$\mathscr{A}$的$j$符号。

n称为可解C^*代数的长度。

由于C^*代数中的交换元在任何忠实表示下的联合谱不变，因此可以定义C^*代数交换元的联合谱。

定义3.2 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$是可解C^*代数$\mathscr{A}$中关于$\mathscr{A}_p$交换的，即对任意i,j，$[T_i,T_j]\in\mathscr{A}_k$，若$T/A_k=(T_1/A_k,\cdots,T_i/A_k)$是可逆的，则称$T$是$K$-Fredholm算子组。$k$-Fredholm算子组的全体记为$\mathscr{F}_k$。而$S_{p_k}(T)=\{z;(T_1-z_1,\cdots,T_n-z_n)\overline{\in}\mathscr{F}_k\}$

命题3.3 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$是可解C^*代数$\mathscr{A}$中的K-Fredholm算子组的充要条件是：对任意$x\in X_k$，$(\rho_k(T_1)(x),\cdots,\rho_k(T_n)(x))$是$H_k$上的可逆算子组，或对$\forall\ x\in X_{k-1}$，$(\rho_{k-1}(T_1)(x),\cdots,\rho_{k-1}(T_n)(x))$是$H_{k-1}$上的Fredholm算子组。

证 以下"$\Longleftrightarrow$"表示充要条件。

$T\in\mathscr{F}_k$

$\Longleftrightarrow \rho_k(T)=(\rho_k(T_1),\cdots,\rho_k(T_n))$正则($\mathrm{Ker}\rho_k=\mathscr{A}_k$)

$\Longleftrightarrow$任意 $x\in X_k$,$(\rho_k(T_1)(x),\cdots,\rho_k(T_n)(x))$可逆

$\Longleftrightarrow$存在 $B_{ij}(\cdot)\in C[X_k,L(H_k))$，使得 $x\in X_k$ 时

$(B_{ij}(x))\alpha(\rho_k(T)(x))=\alpha(\rho_k(T)(x))(B_{ij}(x))=I$，其中 $\alpha(\rho_k(T)(x))$ 是 $\rho_k(T)(x)$的 Curto 算子矩阵

$\Longleftrightarrow$存在 $B_{ij}\in\mathscr{A}$，使得当 $x\in X_k$ 时，

$(\rho_kB_{ij}(x))\alpha(\rho_k(T)(x))=\alpha(\rho_k(T)(x))(\rho_kB_{ij}(x))=I$

$\Longleftrightarrow$存在 $B_{ij}\in\mathscr{A}$,使

$$(B_{ij})\alpha(T)=I-(C_{ij}),\alpha(T)(B_{ij})=I-(D_{ij}),$$

其中 $C_{ij}\in\mathscr{A}_k,D_{ij}\in\mathscr{A}_k,i,j=1,\cdots,2^{n-1}$。

$\Longleftrightarrow$对任意 $x\in X_{k-1}$,

$(\rho_{k-1}(B_{ij})(x))\alpha(\rho_{k-1}(T)(x))=I-(\rho_{k-1}(C_{ij})(x))$,

$\alpha(\rho_{k-1}(T))(\rho_{k-1}(B_{ij})(x))=I-(\rho_{k-1}(D_{ij})(x))$

$\Longleftrightarrow$对任意$x\in X_{k-1}$,$(\rho_{k-1}(T_1)(x),\cdots,\rho_{k-1}(T_n)(x))$是 Fredholm 算子组。证毕。

命题3.4 设 $\mathscr{A}$ 是长度为 n 的可解 C^* 代数，$\mathscr{B}$ 是长度为 m 的可解 C^* 代数，则 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的 C^* 张量积 $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 是长度为 $m+n$ 的可解 C^* 代数,而且 $\rho_k=\bigoplus_{i+j=k}\rho'_i\otimes\rho''_j$，其中 ρ_k,ρ'_i,ρ''_j 分别为 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 中的 i 符号、j 符号和 k 符号。

证　设 $0=\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}_1\subset\cdots\subset\mathscr{A}_{n+1}=\mathscr{A}$,

$$0=\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}_1\subset\cdots\subset\mathscr{B}_{m+1}=\mathscr{B},$$

而 $\mathscr{A}_{i+1}/\mathscr{A}_i\cong C[X_i,K(H_i)]$,$\mathscr{B}_{j+1}/\mathscr{B}_j\cong C[Y_j,K(\widetilde{H}_j)]$。

令 $\mathscr{C}_k=\sum_{i+j=k+1}\mathscr{A}_i\otimes\mathscr{B}_j$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{k+1}/\mathscr{C}_k&\cong\bigoplus_{i+j=k}(\mathscr{A}_{i+1}/\mathscr{A}_i(\otimes)\mathscr{B}_{j+1}/\mathscr{B}_j)\\&\cong\bigoplus_{i+j=k}(C[X_i,K(H_i)]\otimes C[Y_j,K(\widetilde{H}_j)])\\&\cong\bigoplus_{i+j=k}C[X_i\times Y_j,K(H_i\otimes\widetilde{H}_j)]\end{aligned}$$

$$\cong C[\bigsqcup_{i+j=k}(X_i\times Y_j),K(\overline{H_k})],$$

其中 $E\sqcup F$ 表示集合 E 与 F 的不交并，而$\overline{H_p}$，($p<n+m$) 为无限维可分的 Hilbert 空间，$\overline{H}_{n+m}=H_n\otimes\widetilde{H}_m$。

这样由上述证明过程还可得到 $\rho_k=\bigoplus_{i+j=k}(\rho'_i\otimes\rho''_j)$。证毕。

定理3.5 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$，$W=(W_1,\cdots,W_m)$ 分别为可解 C^* 代数 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 中的交换算子组，则对任意 k

$$S_{p_k}(T\otimes I,I\otimes W)=\bigsqcup_{i+j=k}(S_{p_i}(T)\times S_{p_j}(W))$$

证 记 $Z_k=\bigsqcup_{i+j=k}(X_i\times Y_j)$。若 $x\in X_i$，$(\rho'_i(T_1)(x),\cdots,\rho'(T_n)(x))$ 的边界算子为$\{D_i(x)\}$；$y\in Y_j$，$(\rho''_j(W_1)(y),\cdots,\rho''_j(W_m)(y))$ 的边界算子为 $\{G_j(y)\}$；$z\in Z_k$，$(\rho_k(T\otimes I)(z),\rho_k(I\otimes W)(z))$的边界算子为$\{H_k(z)\}$. 只须证明 $(T\otimes I,I\otimes W)\in\mathscr{F}_k$ 的充分且必要条件是对每个 i,j，若 $i+j=k$，必有 $T\in\mathscr{F}_i$ 或 $W\in\mathscr{F}_j$。

$$(T\otimes I,I\otimes W)\in\mathscr{F}_k$$

$\Longleftrightarrow$每个 $z=(x,y)\in\bigsqcup(X_i\times Y_j)$，$(\rho_k(T\otimes I)(z),\rho_k(I\otimes W)(z))$正则

$\Longleftrightarrow$每个 k，每个 $z\in Z_k$，$H_k^*(z)H_k(z)+H_{k+1}(z)H_{k+1}^*(z)$ 可逆 (Curto[55])

$\Longleftrightarrow$每个 $s+t=k$，$(x,y)=z\in Z_k$

$(D_s^*(x)D_s(x)+D_{s+1}(x)D_{s+1}^*(x))\otimes I+I\otimes(G_t^*(y)G_t(y)+G_{t+1}(y)G_{t+1}^*(y))$可逆

(引理2.2)

$\Longleftrightarrow$每个 s，$x\in X_i$，$D_s^*(x)D_s(x)+D_{s+1}(x)D_{s+1}^*(x)$可逆

或每个 t，$y\in Y_j$，$G_t^*(y)G_t(y)+G_{t+1}(y)G_{t+1}^*(y)$可逆

$\Longleftrightarrow$任意 $x\in X_i$，$\rho_i(T)(x)=(\rho_i(T_1)(x),\cdots,\rho_i(T_n)(x))$ 正则

或任意 $y\in Y_j$，$\rho_j(W)(y)=(\rho_j(W_1)(y),\cdots,\rho_j(W_m)(y))$正则

$\Longleftrightarrow T\in\mathscr{F}_i$或$W\in\mathscr{F}_j$（命题3.3）。证毕。

注：当$k=0$时，$S_{p_0}(T\otimes I, I\otimes W)=S_{p_0}(T)\times S_{p_0}(W)$。但易知$S_{p_0}(T)=S_p(T)$，于是$S_p(T\otimes I, I\otimes W)=S_p(T)\times S_p(W)$。当$\mathscr{A}_1=\mathscr{B}_1=K$（紧算子理想），$S_{p_1}(T\otimes I, I\otimes W)=S_{p_1}(T)\times S_{p_0}(W)\bigcup S_{p_0}(T)\times S_{p_1}(W)$。此时$S_{p_1}(T)=S_{p_e}(T)$，于是$S_{p_e}(T\otimes I, I\otimes W)=S_{p_e}(T)\times S_p(W)\bigcup S_p(T)\times S_{p_e}(W)$。这样§2中关于联合谱与联合本质谱的结论都是本节的特殊情况。

为了导出Ind_k的定义，需要B. Boss和D. D. Bleecker[39]的引理。

引理3.6 设$A(\cdot)$是定义在拓扑空间E，取值于Hilbert空间H上Fredholm算子的连续函数，且$\dim\mathrm{Ker}A(x)$是与x无关的常数，则$\bigsqcup\limits_{x\in E}\mathrm{Ker}A(x)$和$\bigsqcup\limits_{x\in E}\mathrm{Ker}A^*(x)$都是$E$上的向量丛。

记$\bigsqcup\mathrm{Ker}A(x)$在$E$上的向量丛中的等价类为$[\mathrm{Ker}A]$。

引理3.7 设$A(\cdot)$如引理3.5，则存在投影算子P，使得$I-P$为有限秩，而$\dim\mathrm{Ker}PA(x)$与x无关，而对任意x，$\mathrm{Ker}[PA(x)]^*=(1-P)H$。

定义3.8 设$A(\cdot)$如引理3.5，定义

$$\mathrm{Ind}A=[\mathrm{Ker}PA]-[\mathrm{Ker}(PA)^*]。$$

引理3.9 设$A(\cdot)$如引理3.5，且$\dim\mathrm{Ker}A(x)$是与x无关的常数，则$\mathrm{Ind}A=[\mathrm{Ker}A]-[\mathrm{Ker}A^*]$。

对于算子组，我们定义

定义3.10 设$A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$是定义在拓扑空间$E$上取值于Hilbert空间$H$上的Fredholm算子组的连续函数，则定义

$$\mathrm{Ind}A=\mathrm{Ind}\alpha(A)。$$

命题3.11 设$A(x)$如定义3.9，$\{D_j(x)\}_{j=1}^n$是$A(x)$导出的边界算子，则必有H中余维为有限的闭子空间的投影算子p，使得对任意j，$\dim(\mathrm{Im}\widetilde{D}_j)^\perp\cap(\mathrm{Ker}\widetilde{D}_{j+1})$与$x$无关，且

$$\mathrm{Ind}A=\Sigma(-1)^{j+1}[\mathrm{Ker}(\widetilde{D}_j\widetilde{D}_j^*+\widetilde{D}_{j+1}^*\widetilde{D}_{j+1})]$$

$$=\Sigma(-1)^{j+1}(\mathrm{Im}\widetilde{D}_j)^{\perp}\cap(\mathrm{Ker}\widetilde{D}_{j+1})],$$

其中 $\widetilde{D}_j=P_{\mathrm{Ker}\overline{D}_j}\overline{D_j}$。而 $j=2k$ 时，$\overline{D_j}=P_{j+1}D_j$，$j=2k+1$ 时，$\overline{D_j}=D_jP_j$，其中 $P_j=\underbrace{P\oplus\cdots\oplus P}_{\binom{n}{j}}$。

证　由定义 $\alpha(A)=\begin{bmatrix} D_0 & D_1^* & & \\ & D_2 & D_3^* & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$，

由引理3.5的证明([3.9])可知，当 $H\otimes C^{2^{n-1}}$ 中的投影 P_0，只要其余维数充分大时，都可使 $\dim\mathrm{Ker}P_0\alpha(A(x))$ 与 x 无关。特别取 H 中投影算子 P，使 $(PH)^{\perp}$ 的维数充分大时，也必有 $P^{\perp}H\otimes C^{2^{n-1}}$ 的维数充分大，使得 $\dim\mathrm{Ker}\widetilde{P}\alpha(A)$ 与 x 无关。这里 $\widetilde{P}=P\otimes I\in L(H\otimes C^{2^{n-1}})$。经计算知

$$\widetilde{P}\alpha(A)=\begin{bmatrix} P_0D_0 & P_0D_1^* & \\ & P_1D_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overline{D_0} & \overline{D_1^*} & \\ & \overline{D_2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}。$$

由于 $\widetilde{D}_{j+1}\widetilde{D}_j$ 是紧的，由 Curto[55]证明可知任意 $x\in X$，

$$\mathrm{Ker}\,\widetilde{P}\alpha(A(x))=\oplus\mathrm{Ker}\,(\widetilde{D}_{2j}^*\widetilde{D}_{2j}+\widetilde{D}_{2j+1}\widetilde{D}_{2j+1}^*)。$$

又由于 $x\to\dim\mathrm{Ker}T(x)$ 具有上半连续性（T 是定义在 E 上取值于 $L(H)$ 的连续函数）及 $\dim\mathrm{Ker}\,\widetilde{P}\alpha(A(x))$ 是常数，于是对每个 j，$\dim\mathrm{Ker}(\widetilde{D}_{2j}^*\widetilde{D}_{2j}+\widetilde{D}_{2j-1}\widetilde{D}_{2j-1}^*)$ 也是常数，这样 $\bigcup_{x\in E}\mathrm{Ker}(\widetilde{D}_{2j}^*\widetilde{D}_{2j}+\widetilde{D}_{2j-1}\widetilde{D}_{2j-1}^*)$ 是向量丛。同样 $\bigcup_{x\in E}\mathrm{Ker}(\widetilde{D}_{2j+1}\widetilde{D}_{2j+1}^*+\widetilde{D}_{2j}^*\widetilde{D}_{2j})$ 也是向量丛。这样由引理3.5，

$$\mathrm{Ind}\alpha(A)=[\mathrm{Ker}\,\widetilde{P}\alpha(A)]-[\mathrm{Ker}\,(\widetilde{P}\alpha(A))^*]$$

$$=\sum(-1)^{j+1}[\mathrm{Ker}(\widetilde{D}_j^*\widetilde{D}_j+\widetilde{D}_{j-1}\widetilde{D}_{j-1}^*]$$

$$=\sum(-1)^{j+1}[\mathrm{Ker}\,\widetilde{D}_{j+1}\cap(\mathrm{Im}\widetilde{D}_j)]。$$证毕。

由[39]还有以下引理。

引理3.12 设 $A(\cdot),B(\cdot)$都是定义在E上取值于H上的Fredholm算子的连续函数，而且有定义在$[0,1]\times E$上取值于H上的Fredholm算子的连续函数$F(\cdot,\cdot)$，使得$F(\cdot,0)=A(\cdot)$，$F(\cdot,1)=B(\cdot)$，则 $\mathrm{Ind}A=\mathrm{Ind}B$。

我们来证明以下的张量积的指标的乘法定理。

定理3.13 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$是可解C^*代数$\mathscr{A}$的 iFredholm算子组，$\mathrm{W}=(\mathrm{W}_1,\cdots,\mathrm{W}_m)$是可解 C^*代数 $\mathscr{B}$ 的 j Fredholm 算子组，则 $(T\otimes I,I\otimes\mathrm{W})$ 是 $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 的 $i+j-1=p$ Fredholm 算子组，且 $\mathrm{Ind}_p(T\otimes I,I\otimes\mathrm{W})=\mathrm{Ind}_iT\boxtimes\mathrm{Ind}_j\mathrm{W}$；
其中$\boxtimes$为$K(X)$与$K(Y)$中的外积，详见Karubi[120]，注意为避免与本文中符号相混，$\boxtimes$意义与Karubi的有所不同。

证 存在H上投影算子p，使

$$\mathrm{Ind}_iT=[\mathrm{Ker}\,\widetilde{Pa}(T)]-[\mathrm{Ker}(\widetilde{Pa}(T))^*],$$

存在投影算子Q，使得

$$\mathrm{Ind}_j\mathrm{W}=[\mathrm{Ker}\,\widetilde{Qa}(\mathrm{W})]-[\mathrm{Ker}(\widetilde{Qa}(\mathrm{W})^*],$$

设$\{D_j\},\{G_j\},\{H_k\}$分别为命题3.19中的边界算子，

则
$$H_k=\begin{bmatrix}D_k\otimes I & (-1)^k\otimes G_1 & \\ & D_{k-1}\otimes I & \\ & & \ddots\end{bmatrix},$$

对任意 $z=(x,y)\in Z_k,t\in[0,1]$，定义

$$H_k(z,t)=\begin{bmatrix}(tD_k(x)+(1-t)\widetilde{D}_k(x)\otimes I & (-1)^kI\otimes(tG_1(y)+(1-t)\widetilde{G}_1(y)) & \\ & (tD_{k-1}(x)+(1-t)\widetilde{D}_{k-1}(x))\otimes I & \\ & & \ddots\end{bmatrix},$$

$$\alpha(z,t)=\begin{bmatrix}\widetilde{H}_0(z,t) & \widetilde{H}_1^*(z,t) & \\ & \widetilde{H}_2(z,t) & \\ & & \ddots\end{bmatrix},$$

则

$$\alpha(z,0)=\begin{bmatrix}\widetilde{H}_0(z) & \widetilde{H}_1^*(z) & \\ & \widetilde{H}_2(z) & \\ & & \ddots\end{bmatrix},$$

$$\alpha(z,1)=\begin{bmatrix}H_0(z) & H_1^*(z) & \\ & H_2(z) & \\ & & \ddots\end{bmatrix}。$$

对 $\forall$ 固定的 $z=(x,y)$ 和 $t\in[0,1]$，$\alpha(z,t)-\alpha(T\otimes I,I\otimes W)(z)$ 是有限秩算子，因此 $\alpha(z,t)$ 是 Fredholm 算子，于是由引理 3.11 $\mathrm{Ind}\alpha(T\otimes I,I\otimes W)=\mathrm{Ind}\alpha(z,0)$。

对任意 $(i',j')\neq(i,j)$，其中 $i+j=k+1$，必有 $i'\leqslant i-1$ 或者 $j'\leqslant j-1$，这样 $\rho_{i'-1}(T)$ 可逆或者 $\rho_{j'-1}(W)$ 可逆，这样对任意 $s+t=k$，$\mathrm{Ker}((\widetilde{D}_i^*\widetilde{D}_i+\widetilde{D}_{i+1}\widetilde{D}_{i+1}^*)\otimes I+I\otimes(\widetilde{G}_j^*\widetilde{G}_j+\widetilde{G}_{j+1}\widetilde{G}_{j+1}^*))=\{0\}$。因此我们只须考虑在 $X_{i-1}\times Y_{j-1}$ 上的向量丛。

由于 $\widetilde{D}_{i+1}\widetilde{D}_i=0$，$\widetilde{G}_{j+1}\widetilde{G}_j=0$，

$$\mathrm{Ker}\ \alpha(z,0)=\bigoplus_k\bigoplus_{i+j=2k}(\widetilde{D}_i^*\widetilde{D}_i+\widetilde{D}_{i+1}\widetilde{D}_{i+1}^*)(x)\otimes I+$$

$$I\otimes(\widetilde{G}_j^*\widetilde{G}_j+\widetilde{G}_{j+1}\widetilde{G}_{j+1}^*)(y),$$

$$\mathrm{Ker}\ \alpha(z,0)^*=\bigoplus_k\bigoplus_{i+j=2k+1}(\widetilde{D}_i^*\widetilde{D}_i+\widetilde{D}_{i+1}\widetilde{D}_{i+1}^*)(x)\otimes I+$$

$$I\otimes(\widetilde{G}_j^*\widetilde{G}_j+\widetilde{G}_{j+1}\widetilde{G}_{j+1}^*)(y),$$

由于 $\dim\mathrm{Ker}(\widetilde{D}_i^*\widetilde{D}_i+\widetilde{D}_{i+1}\widetilde{D}_{i+1}^*)$ 和 $\dim\mathrm{Ker}(\widetilde{G}_j^*\widetilde{G}_j+\widetilde{G}_{j+1}\widetilde{G}_{j+1}^*)$ 都是常数，因此 $\dim\mathrm{Ker}\ \alpha(z,0)$ 也是常数。

因此

$\mathrm{Ind}_p(T\otimes I,I\otimes W)$

$= \mathrm{Ind}\alpha(T\otimes I, I\otimes W)$

$= \mathrm{Ind}\alpha(\cdot, 0)$

$= [\mathrm{Ker}\alpha(\cdot,0)] - [\mathrm{Ker}(\alpha(\cdot,0))^*]$

$= \Sigma(-1)^{k+1}[\mathrm{Ker}(\widetilde{H}_k^*\widetilde{H}_k + \widetilde{H}_{k+1}\widetilde{H}_{k+1}^*)]$

$= \Sigma(-1)^{k+1}\sum_{i+j=k}[\mathrm{Ker}(\widetilde{D}_i^*\widetilde{D}_i + \widetilde{D}_{i+1}\widetilde{D}_{i+1}^*)\otimes I + I\otimes(\widetilde{G}_j^*\widetilde{G}_j +$

$\widetilde{G}_{j+1}\widetilde{G}_{j+1}^*)]$

$= \Sigma(-1)^{k+1}\Sigma[\mathrm{Ker}(\widetilde{D}_i^*\widetilde{D}_i + \widetilde{D}_{i+1}\widetilde{D}_{i+1}^*]$

$\otimes[\mathrm{Ker}(\widetilde{G}_j^*\widetilde{G}_j + \widetilde{G}_{j+1}\widetilde{G}_{j+1}^*)]$

$= -\Sigma(-1)^{i+1}[\mathrm{Ker}(\widetilde{D}_i^*\widetilde{D}_i + \widetilde{D}_{i+1}\widetilde{D}_{i+1}^*)]\otimes[\Sigma(-1)^{j+1}$

$[\mathrm{Ker}(\widetilde{G}_j^*\widetilde{G}_j + \widetilde{G}_{j+1}\widetilde{G}_{j+1}^*)]$

$= -[\mathrm{Ind}_i T]\otimes[\mathrm{Ind}_j W]$。

可解 C^*代数张量积上的一些结果可应用于 Polydisc 上的 Toeplitz 算子理论的研究。

我们知道，Hardy 空间上的平移算子 T_z 生成的 C^* 代数 $C^*(T_z)$是长度为1的可解 C^* 代数，其中 $\mathscr{A}_1=K$，$\mathscr{A}_2=C^*(T_z)$，而 $C^*(T_z)/K=C(T)$，其中 T 为单位圆周。在 T^n 上也有 $T=(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$生成的 C^*代数 $C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$，并且容易知道 $C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})=C^*(T_z)\otimes\cdots\otimes C^*(T_z)$。因此由命题 3.4 有

命题 3.14 $C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$是长度为 n 的可解 C^* 代数，且对任意 k，$\rho_k=\oplus(\rho_{j_1}\otimes\cdots\otimes\rho_{j_k})$。特别对 Toeplitz 算子 T_φ，$\rho_k(T_\varphi)(z_{j_1},\cdots,z_{j_k})=T_{\varphi'}\in C^*(T_{z_{i_1}},\cdots,T_{z_{i_q}})$，其中 φ' 是固定$(z_{j_1},\cdots,z_{j_k})$得到的 T^{n-k} 上的函数，$\{i_1,\cdots,i_q\}=\{1,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\cdots,j_k\}$。特别对 $k=n$，有 $\rho_n(T_\varphi)=\varphi\in C(T^n)$。

推论3.15 $T_\varphi=(T_{\varphi_1},\cdots,T_{\varphi_k})$ 是 $C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$中交换的 Toeplitz 算子组，则 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)\in S_{p_m}(T_\varphi)$ 的充分且必要条件是，对任意$(z_{j_1},\cdots,z_{j_m})$，$(T_{\varphi'_1},\cdots,T_{\varphi'_k})$是 $C^*(T_{z_{i_1}},\cdots,T_{z_{i_q}})$ 上

的可逆的算子组，其中 $\varphi'_j, j=1,2,\cdots,k$，是固定变量$(z_{j_1},\cdots,z_{j_m})$而得到的函数。

命题3.16 设 $\varphi_j\in H^\infty(T), j=1,\cdots,k$，则$Sp(T_{\varphi_1},\cdots,T_{\varphi_k})=\hat{\varphi}(\overline{D})$，其中$\widehat{\varphi}$是$\varphi$在单位圆内的解析延拓。

证 若 $\varphi\in H^\infty(T)$，则有 $\varphi_r(z)=\varphi(rz), r<1$，是$\overline{D}$上的解析函数，且$\lim\limits_{r\to1}\|\varphi-\varphi_r\|=0$。由解析函数演算的谱映照定理([113])，$Sp(T_{\varphi_r})=\widehat{\varphi_r}(\overline{D})$。但谱具有上半连续性，而 $\|T_\varphi-T_{\varphi_r}\|=\|\varphi-\varphi_r\|_\infty\to0$，于是 $Sp(T_\varphi)\supset\lim Sp(T_{\varphi_r})=\lim\widehat{\varphi_r}(\overline{D})=\widehat{\varphi}(\overline{D})$。反之，若$\lambda\bar{\in}\widehat{\varphi}(\overline{D})$，则存在 $\delta>0$，使得任意 $z\in\overline{D}$，$\sum\limits_{j=1}^{k}|\widehat{\varphi}_j(z)-\lambda_j|\geqslant\delta$，由Corona 定理（参见[66]）有 $\psi_j\in H^\infty(T), j=1,2,\cdots,k$，使得$\Sigma\psi_j(z)(\varphi_j(z)-\lambda_j)=1$。这样$\Sigma T_{\psi_j}(T_{\varphi_j}-\lambda_j)=I$。由于 T_{ψ_i}与T_{φ_j}的交换性及第二章定理 4.1知 $\lambda\bar{\in}Sp(T_\varphi)$。证毕。

推论3.17 当 $\varphi_j\in H^\infty(T^n)$，$j=1,\cdots,k$，$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_k)$有$Sp_{n-1}(T_\varphi)=\widehat{\varphi}(\partial_{n-1}D^n)$，其中 $\partial_{n-1}D^n=\{z=(z_1,\cdots,z_n)$；至少有$n-1$个 z_j 使得$|z_j|=1\}$。

证 由定理3.5，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)\bar{\in}Sp_{n-1}(T_\varphi)$的充分且必要条件是 $T_{\varphi'}-\lambda=(T_{\varphi'_1}-\lambda_1,\cdots,T_{\varphi'_k}-\lambda_k)$ 是可逆的，其中 φ' 是固定任意 $n-1$ 个变量得到的 $C(T)$中的函数。但由命题3.15，$T_{\varphi'}-\lambda=(T_{\varphi'_1}-\lambda_1,\cdots,T_{\varphi'_k}-\lambda_k)$可逆的充分且必要条件是$\lambda\bar{\in}\widehat{\varphi'}(D)$，即对任意$(z_{j_1},\cdots,z_{j_{n-1}})$，$|z_{j_1}|=\cdots=|z_{j_{n-1}}|=1$ 和 z_i，$|z_i|\leqslant1$，$\lambda\neq\widehat{\varphi}(z_{j_1},\cdots,z_{j_{n-1}},z_i)$，其中$\{i\}=\{1,\cdots,n\}\backslash\{j_1,\cdots,j_{n-1}\}$。此即为$\lambda\bar{\in}\partial_{n-1}(D^n)$。证毕。

我们知道，$C^*(T_z)$中的算子可唯一地表示为 $T_\varphi+K$ 形式，其中 K 为紧算子，而 T_φ是由连续函数 φ 引出的 Toeplitz 算子。在 $C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$中也有类似现象，为此我们先证

引理3.18 设 $\varphi_j \in C(T^n), j=1,\cdots,k$，则 $S_{p_e}(T_{\varphi_1},\cdots,T_{\varphi_k}) \subset \sigma_n(T_\varphi)$。

证 $n=1$ 时，由于 $C^*(T_z)/K=C(T)$，因此有 $S_{p_e}(T_\varphi)=\varphi(T)$。又由于 $[T_{\varphi_i},T_{\varphi_j}]$ 和 $[T_{\varphi_i},T^*_{\varphi_j}]$ 都是紧算子，因此当 $\varphi(z)\in S_{p_e}(T)$ 时，必有正交的单位向量 $\{f_p\}$，使 $(T_{\varphi_j}-\varphi_j(z))f_p\to 0$，$(p\to\infty)$，$j=1,\cdots,n$。

一般地，对任意 $\lambda\in\partial D^n$，存在变量分离的函数 ψ_j，$\psi_j=\sum_{i=1}^{s_j}\psi^j_{i1}\otimes\cdots\otimes\psi^j_{in}$，使得 $\|\psi_j-\varphi_j\|_\infty<\varepsilon$，其中 ε 是任意给定的正数。由 $n=1$ 的结论，存在 $\{f_p\}$ 是单位正交向量，是 $T_{\psi^j_{ik}}$ 的公共的近似特征向量。令 $\widetilde{f}_p=f_p\otimes\cdots\otimes f_p$，则必有充分大的 p，使 $\|(T_{\psi_j}-\psi_j(\lambda))\widetilde{f}_p\|<\varepsilon$，于是

$$
\begin{aligned}
&\|(T_{\varphi_i}-\varphi(\lambda))\widetilde{f}_p\| \\
&\leqslant\|(T_{\varphi_i}-T_{\psi_i})\widetilde{f}_p\|+\|(T_{\psi_i}-\psi_i(\lambda))\widetilde{f}_p\|+\|(\psi_i(\lambda)-\varphi_i(\lambda))\widetilde{f}_p\| \\
&<3\varepsilon,
\end{aligned}
$$

此即证明了任意 $\lambda\in\partial D^n$，$\varphi(\lambda)=(\varphi_1(\lambda),\cdots,\varphi_n(\lambda))\in\sigma_n(T_\varphi)$。但又由于 $\varphi(\partial D^n)=S_{p_e}(T_\varphi)$，于是 $S_{p_e}(T_\varphi)\subset\sigma_n(T_p)$ 成立。证毕。

命题3.19 $T\in C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$，则必有唯一的 $\varphi\in C(T^n)$ 和 $K\in\mathscr{A}_n$，使得 $T=T_\varphi+K$，且 $\|T\|=\|\varphi\|_\infty$。

证 记 $W=\{T;T=T_\varphi+K,K\in\mathscr{A}_n,\varphi\in C(T^n)\}$，

(1) $\mathscr{A}_n$ 就是 $C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$ 的交换子理想 I。事实上，由于 $\mathscr{A}_n=\sum_{j=1}^{m}C^*(T_z)\otimes\cdots\otimes\underset{(j)}{K}\otimes\cdots\otimes C^*(T_z)$ 以及 K 为 $C^*(T_z)$ 的交换子理想，得到 $\mathscr{A}_n\subset I$。又由于恒等式 $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$ 以及 $C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})=C^*(T_z)\otimes\cdots\otimes C^*(T_z)$ 得 $I\subset\mathscr{A}_n$。

(2) 若 $T=T_\varphi+K$，则易知 $\|T/\mathscr{A}_n\|\leqslant\|T_\varphi\|\leqslant\|M_\varphi\|=\|\varphi\|_\infty$，其中 M_φ 是 $L^2(T^n)$ 中乘 φ 的乘法算子。对任意非交换的多项式 $P(T_{\varphi_1},\cdots,T_{\varphi_k})$，我们来证明 $\|P(T_{\varphi_1},\cdots,T_{\varphi_k})\|\geqslant\|P(\varphi_1,\cdots,\varphi_k)\|_\infty$

设 $\lambda=(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_k(z))$，由引理3.17知有$\{f_p\}$，使$\|(T_{\varphi_j}-\varphi_j(z))f_p\|\to 0(p\to\infty)$。于是$\|P(T_{\varphi_1},\cdots,T_{\varphi_k})\|\geqslant\sup_{z\in T^n}|P(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_k(z))|=\|P(\varphi_1,\cdots,\varphi_k\|_\infty$。$C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$的稠密子集可以表为$P(T_{\phi_1},\cdots,T_{\phi_k})$形式，而这些算子生成的交换子的符号为0，因此$\|T_\varphi/\mathscr{A}_n\|=\inf\|T_\varphi+P(T_{\phi_1},\cdots,T_{\phi_k})\|\geqslant\|P(\psi_1,\cdots,\psi_k)+\varphi\|_\infty=\|\varphi\|_\infty$，因此$\|T/\mathscr{A}_n\|=\|\varphi\|_\infty$。

(3) W是闭的。设$\{T_{\varphi_p}+K_p\}$是W中的柯西列，则由于(2)$\{\varphi_p\}$也是柯西列，则有φ_0，使得$\varphi_p\to\varphi_0$，$K_0\in\mathscr{A}_n$，使$K_p\to K_0$ $(p\to\infty)$，此即有$T_{\varphi_p}+K_p\to T_{\varphi_0}+K_0$。这就证明了W是闭的。

(4) 由于$T_{z_1},\cdots,T_{z_n}\in$W，而W对$*$运算是封闭的，对加法也是封闭的，又由(3) W对极限运算也是封闭的，因此只要证明W对乘法运算也是封闭的，就可以证明$C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})=$W了。但是乘法运算可以由"变量分离"的算子的线性和来逼近，于是由于(3)可知对乘数也是封闭的。
证毕。

命题3.20 设$(T_1,\cdots,T_k)$是$C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$的代数生成元，且$T_j=T_{\varphi_j}+K_j$，$\varphi_j\in C(T^n)$，$K_j\in\mathscr{A}_n$，$j=1,\cdots,k$，则$(\varphi_1,\cdots,\varphi_k)$在$T^n$上是1-1的，特别有$k\geqslant n$。

证　设W是$C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$中含$\mathscr{A}_n$的闭$*$代数，令$\Phi(\mathrm{W})=\{\varphi;\varphi\in C(T^n)$，存在$K\in\mathscr{A}_n$，使$T_\varphi+K\in\mathrm{W}\}$。则用命题3.18知$\mathrm{W}\to\Phi(\mathrm{W})$是$C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$中闭$*$代数与$C(T^n)$中闭子代数的一一对应。这样当$(T_1,\cdots,T_k)$生成$C^*(T_{z_1},\cdots,T_{z_n})$时，必有$(\varphi_1,\cdots,\varphi_k)$生成$C(T^n)$。由Stone定理必有$(\varphi_1,\cdots,\varphi_k)$在$T^n$上是1-1的，从而只可能$k\geqslant n$。证毕。

第七章 算子方程与联合谱

算子方程的研究已有不少文章和较长历史了，一些经典的结果（参见[6]、[64]、[92]等）已为大家熟知并且还在推广中，我们将看到，联合谱理论将为传统的算子方程研究带来不少新信息。我们在这一章中主要讨论如何用算子张量积的联合谱、联合本质谱来讨论初等算子的谱性质。

§1 Hilbert 空间上算子理想的一些基本结果

为了后面的需要，本节将扼要地介绍一下 Hilbert 空间上的几类重要的算子理想以及与 Hilbert 空间的 Cross 张量积的一些联系。

定义1.1 设 $B_1\otimes B_2$ 为 Banach 空间 B_1 和 B_2 的代数张量积。$B_1\otimes B_2$ 上的范数 α 称为 Cross 范数，如果对任意 $f\in B_1, g\in B_2$，有 $\alpha(f\otimes g)=\|f\|\cdot\|g\|$；$\alpha$ 称为一致的，若对任意 $T\in L(B_1), S\in L(B_2)$，有 $\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} Tf_i\otimes Sg_i\right)\leqslant\|S\|\,\|T\|\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\otimes g_i\right)$，这里 $f_i\in B_1$，$g_i\in B_2$ 是任意的。

由于篇幅所限，下面的一些命题都不加证明了，有兴趣的读者可以参阅 Schatten[106]，有些还可以不妨自行证明。

命题1.2 设 α 是 $B_1\otimes B_2$ 上的 Cross 范数，则 α 是 $B_1\times B_2$ 上的二元连续函数。当 B_1 与 B_2 皆可分时，$B_1\otimes B_2$ 也是可分的。

命题1.3 设 $T\in L(B_1), S\in L(B_2)$，则可以定义 $B_1\otimes B_2$ 上的线性算子 $S\otimes T$。

对任意 $\sum_{i=1}^{n} f_i\otimes g_i\in B_1\otimes S_2$，可以唯一确定映射：

$$(S\otimes T)\left(\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes g_i\right)=\sum_{i=1}^{n}Sf_i\otimes Tg_i,$$

如果 α 是 $B_1\otimes B_2$ 上的 Cross 范数，则 α 是一致的充要条件是 $\|S\otimes T\|_\alpha=\|S\|\cdot\|T\|$。

我们记 $\overline{B_1\otimes B_2}$ 为 $B_1\otimes B_2$ 的完备化，则命题2.3告诉我们，当 S 和 T 均为有界算子时，$B_1\otimes B_2$ 上的算子 $S\otimes T$ 可以唯一保范延拓成 $B_1\otimes_\alpha B_2$ 上的有界线性算子，只要 α 是一致的 Cross 范数。

下面引进 $B_1\otimes B_2$ 上两个常用的 Cross 范数。

定理1.4 定义 $B_1\otimes B_2$ 上的两个函数 λ,γ 分别为

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes g_i\right)=\text{Sup}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}F(f_i)G(g_i)\right|;\right.$$

$$\left.F\in B_1^*,\ G\in B_2^*,\ \|F\|=\|G\|=1\right\},$$

$$\gamma\left(\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes g_i\right)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{m}\|f'_j\|\|g'_j\|;\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes g_i=\sum_{j=1}^{m}f'_j\otimes g'_j\right\},$$

则 λ 与 γ 都是 $B_1\otimes B_2$ 上的一致的 Cross 范数，而且 γ 是 $B\otimes B_2$ 最大的 Cross 范数，λ 是 Cross 范数中能保持它的共轭范数在 $B_1^*\otimes B_2^*$ 上也是 Cross 中最小的。此外 λ 的共轭范数就是 γ。

根据需要，我们下面只讨论 $H\otimes\overline{H}$，这里 $\overline{H}$ 是 Hilbert 空间 H 的共轭空间，在 $f\to\overline{f}$ 下，H 与 $\overline{H}$ 是等距共轭线性同构的。设 $\overline{f}\in\overline{H}$，$g\in H$，则 $\overline{f}$ 对 g 的作用可用 H 中的内积表示：$\overline{f}(g)=\langle g,f\rangle$。

命题1.5 $H\otimes\overline{H}$ 线性同构于 H 上的有限秩算子全体，且这可以由下列对应实现，设 $\varphi\otimes\overline{\psi}\in H\otimes\overline{H}$，则对任 $f\in H$，定义

$$(\varphi\otimes\overline{\psi})f=\langle f,\psi\rangle\varphi。$$

然后再线性扩张到整个 $H\otimes\overline{H}$。

对于线性空间 $H\otimes\overline{H}$，它的代数对偶是 $\overline{H}\otimes H$，作用可用内积表示，设 $\varphi\otimes\overline{\psi}\in H\otimes\overline{H}$，$(\overline{f}\otimes g)\in\overline{H}\otimes H$，则

$$\overline{(f\otimes g)}(\varphi\otimes\overline{\psi})=\overline{f(\varphi)}\overline{\psi}(g)=\langle\varphi,f\rangle\langle g,\psi\rangle。$$

$H\otimes\overline{H}$ 上范数 α 称为是酉不变的，若对任意酉算子 U，$V\in L(H)$，有

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}Uf_i\otimes Vg_i\right)=\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes g_i\right),\ \sum_{i=1}^{n}f_i\otimes\overline{g_i}\in H\otimes\overline{H}。$$

命题 1.6 $H\otimes\overline{H}$ 上酉不变 Cross 范数和一致 Cross 范数是等价的，而且这时 λ 作为有限秩算子的范数正是 $L(H)$ 中的范数，λ 是 $H\otimes\overline{H}$ 上最小的酉不变 Cross 范数。

显然，作为有限秩算子全体，$H\otimes\overline{H}$ 是 $L(H)$ 的一个代数理想。$H\otimes\overline{H}$ 在不同的一致 Cross 范数下完备化会得到 $L(H)$ 中一些新的理想。除了前面介绍的 λ、γ 范数，$H\hat{\otimes}\overline{H}$ 还自然为第一章中定义的张量积。

以下我们记

$c_0(H)$＝紧算子理想，

$c_p(H)=\{A;A\in L(H),\mathrm{tr}(|A|^p)<\infty\}$ $1\leqslant p<\infty$，

由 Pederson[96]知在 $c_p(H)$ 中定义范数：$\|A\|_p=\mathrm{tr}(|A|^p)^{\frac{1}{p}}$，$c_p(H)$ 成为 Banach 空间，而且 $c_0(H)$ 的共轭空间为 $c_1(H)$，$c_1(H)$ 的共轭空间为 $L(H)$。基于以上原因，$L(H)$ 有时也记为 $c_\infty(H)$。而特别 $c_2(H)$ 成为 Hilbert 空间，它的内积由 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^*A)$ 给出。$c_2(H)$ 中算子又称为 Hilbert-Schmidt 算子。

定理1.7 设 H 是复的 Hilbert 空间，则有

$$c_0(H)=H\otimes_\lambda\overline{H},c_1(H)=H\otimes_\gamma\overline{H}\text{ 和 }c_2(H)=H\hat{\otimes}\overline{H}。$$

§2 初等算子与Taylor联合谱

设 H 是一个Hilbert空间，任意 $A,B\in L(H)$，可以定义 $L(H)$ 上的两个算子 L_A 和 R_B：设 $X\in L(H)$，则 $L_AX=AX,R_BX=XB$。L_A 称为左乘算子，R_B 称为右乘算子。由左、右乘算子的各种结合，可导出 $L(H)$ 上的所谓初等算子。研究初等算子的谱是算子方程理论中的一个基本课题，已有几十年历史了。

初等算子中，有两个著名但又是基础的算子 $\mathscr{T}_{A,B}$ 和 $\mu_{A,B}$。这里 $A,B\in L(H),\mathscr{T}_{A,B}(X)=AX-XB,\mu_{A,B}(X)=A\times B$。下面的结果是大家熟知的：

$$S_p(\mathscr{T}_{A,B})=S_p(A)-S_p(B),$$
$$S_p(\mu_{A,B})=S_p(A)\cdot S_p(B)。$$

传统的证明方法可见[6]、[92]等。我们试用联合谱理论给予新的证明，推广到一般的初等算子。

引理2.1 设 $J=(L_A,R_B)$ 为 $L(H)$ 上左、右乘算子对，它们在 $c_0(H),c_1(H)$ 和 $c_2(H)$ 上的限制分别记为 $J^0=(L_A^0,R_B^0)$，$J'=(L'_A,R'_B)$ 和 $J^2=(L_A^2,R_B^2)$，则我们有

(1) $J^0=(L_A^0,R_B^0)$ 等同于 $H\otimes_\lambda\overline{H}$ 上的算子对 $(A\otimes I,I\otimes B')$；

(2) $(J^0)'((L_A^0)',(R_B^0)')$ 等同于 $H\otimes_\gamma\overline{H}$ 上的算子对 $(I\otimes A',B\otimes I)=(R'_A,L'_B)$；

(3) $(J^0)''=((L_A^0)'',(R_B^0)'')$ 等同于 $L(H)$ 上的算子对 $(J=(L_A,R_B)$。

（这里 T' 表示T 的 Banach 空间共轭算子）。

证 (1) 由于 λ 是一致的 Cross 范数，我们只须在 $c_0(H)$ 的稠子空间 $H\oslash\overline{H}$ 上证明，因此又只须对任意一秩算子 $\varphi\otimes\overline{\psi}$ 进行证明。事实上对任意向量 $f\in H$，有

$$L_A^0(\varphi\otimes\overline{\psi})f=L_A^0(\langle f,\psi\rangle\varphi)=\langle f,\psi\rangle A\varphi=(A\varphi\otimes\overline{\psi})f,$$

$$R_B^0(\varphi\otimes\overline{\psi})f=(\varphi\otimes\overline{\psi})Bf=\langle Bf,\psi\rangle\varphi=(\varphi\otimes\overline{B^*\psi})f=$$

$$(\varphi\otimes B'\overline{\psi})f,$$

由此推出 $L_A^0(\varphi\otimes\overline{\psi})=(A\otimes I)(\varphi\otimes\overline{\psi})$，$R_B^0(\varphi\otimes\overline{\psi})$

$=(I\otimes B')(\varphi\otimes\overline{\psi})$。

（2） 据§1，任意 $T\in c_1(H)=(c_0(H))'$ 和 $X\in c_0(H)$，有

$$((L_A^0)'T)(X)=T(L_A^0X)=\mathrm{tr}(AXT)=\mathrm{tr}(XTA)=(TA)(X),$$

$$((R_B^0)'T)(X)=T(R_B^0X)=\mathrm{tr}(XBT)=(BT)(X)。$$

注意到 $c_1(H)=H\otimes_\gamma\overline{H}$ 以及 γ 也是一个一致的 Cross 范数，类似(1)我们可得到 $(L_A^0)'=R'_A=I\otimes A'$，和 $(R_B^0)'=L_{B'}=B\otimes I$。

（3） 由定理，我们可以等同 $c_0''(H)$ 与 $L(H)$，这样对任何 $Y\in L(H)$ 和 $T\in c_1(H)=c_0'(H)$，我们有

$$(L_A^0)''Y(T)=Y((L_A^0)'T)=Y(TA)=\mathrm{tr}(TAX)=AY(T),$$

$$(R_B^0)''Y(T)=Y((R_B^0)'T)=Y(BT)=\mathrm{tr}(BTY)=\mathrm{tr}(TYB)$$

$$=YB(T),$$

因而有 $(L_A^0)''=L_A$，$(R_B^0)''=R_B$。

定理 2.2 设 A,B 是 Hilbert 空间 H 上的任意两个算子，(L_A,R_B) 是 A,B 导出的 $L(H)$ 上左、右乘算子对，(L_A^i,R_B^i) 记为 (L_A,R_B) 在 $c_i(H)$ 上的限制，$i=0,1,2$，则有

$$S_p(L_A,R_B)=S_p(A)\times S_p(B),$$

$$S_p(L_A^i,R_B^i)=S_p(A)\times S_p(B),i=0,1,2。$$

证 先证 $S_p(L_A^0,R_B^0)=S_p(A)\times S_p(B)$。

据引理2.1，我们有 $L_A^0=A\otimes I$，$R_B^0=L\otimes B'$ 作用在 $c_0(H)=H\otimes_\lambda\overline{H}$ 上。但由第六章定理1.4，$S_p(A\otimes I)=S_p(A)$ 和 $S_p(I\otimes B')=S_p(B')=S_p(B)$。因此我们有

$$S_p(L_A^0,R_B^0)\subset S_p(L_A^0)\times S_p(R_B^0)=S_p(A)\times S_p(B)。$$

反之设$(0,0)\in S_p(A)\times S_p(B)$，欲证$J^0=(L_A^0, R_B^0)$是Taylor意$\overline{X}$下奇异的，这只须考虑下面四种情况。

（1）如果$0\in\sigma_\pi(A)\cap\sigma_\pi(B')$，则存在两列单位向量$\{x_n\}\subset H$，和$\{y_n\}\subset H$，使得$\|Ax_n\|\to 0$和$\|B'y_n\|\to 0(n\to\infty)$。令$z_n=x_n\otimes\overline{y_n}$，既然$\lambda$是$H\otimes_\lambda\overline{H}$上的Cross范数，我们有$\lambda(z_n)=\|x_n\|\|\overline{y_n}\|=1$.

和$\lambda(L_A^0 z_n)=\lambda(Ax_n\otimes\overline{y_n})=\|Ax_n\|\|\overline{y_n}\|\to 0$，

$\lambda(R_B^0 z_n)=\lambda(x_n\otimes B'\overline{y_n})=\|x_n\|\|B'\overline{y_n}\|\to 0$，

这就证明了$(0,0)\in\sigma_\pi(J^0)\subset S_p(J^0)$。

（2）如果$0\in\sigma_\delta(A)\cap\sigma_\delta(B')$，则有$0\in\sigma_\pi(A')\cap\sigma_\pi(B)$。因为$\gamma$也是$H\otimes_\gamma\overline{H}$上的Cross范数，类似于（1）可证$(B\otimes I, I\otimes A')$在$c_1(H)=H\otimes_\gamma\overline{H}$上是Taylor奇异的。据引理2.1，亦即$(J^0)'$在$c_0'(H)$上Taylor奇异。再据第二章的定理，有$J^0=(L_A^0, R_B^0)$在$c_0(H)$上Taylor奇异。

（3）如果$0\in\sigma_\pi(A)\cap\sigma_\delta(B')$，则或者$0\in\sigma_\pi(B')$，这时据（1）可得$J^0$奇异；或者我们可假定$B'$在$\overline{H}$中非值域稠。同样若$0\in\sigma_\delta(A)$，由（2）也可得$J^0$是奇异的，因此还可假定$A$非单射。

考察$c_1(H)=H\otimes_\lambda\overline{H}$上由交换算子对$J^0=(L_A^0, R_B^0)$导出的复形

$$0\longrightarrow c_0\xrightarrow{d_1}c_0\oplus c_0\xrightarrow{d_2}c_0\longrightarrow 0,$$

这里

$$d_1: z\to\begin{pmatrix}-(I\otimes B')z\\(A\otimes I)z\end{pmatrix},\quad d_2:\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\to(A\otimes I)z_1+(I\otimes B')z_2。$$

由于$B'(\overline{H})$在$\overline{H}$中非稠，因此存在一非零向量$y\in H$，使得$\langle y, B'(\overline{H})\rangle=0$。这时对任意的$x\in H, x\neq 0$和$\varphi\otimes\overline{\psi}\in H\otimes_\lambda\overline{H}$，有

$y\otimes_\gamma\overline{x}\in H\otimes_\gamma\overline{H}=(H\otimes_\lambda\overline{H})'$，因而

$$(y\otimes_\gamma\overline{x})((I\otimes B')(\varphi\otimes\overline{\psi}))=(y\otimes_\gamma\overline{x})(\varphi\otimes B'\overline{\psi})$$
$$=\overline{x}(\varphi)y(B'\overline{\psi})=0。$$

因为 $H\odot\overline{H}$ 在 $H\otimes\lambda\overline{H}$ 中稠和 λ 是一致的，由 $y\otimes_\gamma\overline{x}$ 的连续性，不难验证 $(y\otimes_\gamma\overline{x})(x\otimes_\lambda\overline{y})(\mathrm{Im}(I\otimes B'))=0$。但另一方面，我们有

$$(y\otimes_\gamma\overline{x})(x\otimes_\lambda\overline{y})=\overline{x}(x)y(\overline{y})=\|x\|^2\|y\|^2\neq 0,$$

这说明了 $x\otimes_\lambda\overline{y}\overline{\in}\mathrm{Im}(I\otimes B')$。

由于 A 非单射，可取一个非零向量 $x\in\mathrm{Ker}\,A$，y 如上。既然这时 $x\otimes\overline{y}\overline{\in}\mathrm{Im}(I\otimes B')$，我们有

$$\begin{pmatrix}x\otimes\overline{y}\\0\end{pmatrix}\overline{\in}\,\mathrm{Im}\,d_1 \text{ 和 } d_2\begin{bmatrix}x\otimes_\lambda\overline{y}\\0\end{bmatrix}=(A\otimes I)\ (x\otimes_\lambda\overline{y})=0,$$

因此 $\mathrm{Im}d_1\neq\mathrm{Ker}d_2$，可得 $J^0=(L_A^0,R_B^0)$ 是 Taylor 奇异的。

(4) 如果 $0\in\sigma_\delta(A)\cap\sigma_\pi(B')$，类似于(3)，我们可不妨假定 $\mathrm{Im}A$ 在 H 中非稠且 $\mathrm{Ker}B'\neq\{0\}$，然后再证明此时 $J^0=(L_A^0,R_B^0)=(A\otimes I,I\otimes B')$ 仍然是奇异的，详细的证明省略了。这样我们就证明了 $S_p(L_A^0,R_B^0)=S_p(A)\times S_p(B)$。

据引理 2.1 和第二章定理，我们立即得到

$S_p(A'_A,R'_B)=S_p(A)\times S_p(B)$ 和 $S_p(L_A,R_B)=S_p(A)\times S_p(B)$。

由于 $c_2(H)=H\otimes\overline{H}$ 是 Hilbert 空间，则由引理可证 $(L_A^2,R_B^2)=(A\otimes I,I\otimes B')$，因此据第六章定理 2.3，可直接推出 $S_p(L_A^2,R_B^2)=S_p(A)\times S_p(B)$。证毕。

推论2.3 设 $f(z_1,z_2)$ 是在 $S_p(A)\times S_p(B)$ 某邻域上的二元解析函数，则可定义 $L(H)$ 上的算子 $f(L_A,R_B)$ 并有等式 $S_p(f(L_A,R_B))=f(S_p(A),S_p(B))$。特别，当 $f(z_1,z_2)=\sum a_{ij}z_1^iz_2^j$ 为二元复多项式时，有 $f(L_A,R_B)X=\sum a_{ij}A^iXB^j$，$X\in L(H)$ 以及 $S_p(f(L_A,$

$R_B)) = \sum a_{ij} S_p(A)^i S_p(B)^j$。

推论2.4 设 $f(L_A, R_B)$ 如上面所定义，记 $\mathscr{D} = c_0(H)$，$c_1(H)$ 或 $c_2(H)$，则 $f(L_A, R_B)$ 正则的充要条件是它限制在 $\mathscr{D}$ 上正则。若 $f(L_A, R_B)$ 正则时，则它在 $\mathscr{D}$ 上作用时的逆正好是 $f(L_A, R_B)$ 逆在 $\mathscr{D}$ 上的限制。

证 由于 $S_p(L_A, R_B) = S_p(A) \times S_p(B)$，则存在分别围绕 $S_p(A)$ 和 $S_p(B)$ 的围道 Γ_A 和 Γ_B，使得 $f(z_1, z_2)$ 在 $\Gamma_A \times \Gamma_B$ 围成的内域上解析。所以这时 $f(L_A, R_B)$ 的 Cauch-Weil 积分 [112] 可以简化成

$$f(L_A, R_B)X = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_A} \int_{\Gamma_B} f(z_1, z_2)(z_1 - L_A)^{-1}(z_2 - R_B)^{-1} \times dz_1 dz_2, \tag{3.2}$$

其中 $X \in L(H)$。

设 $(z_1, z_2) \in \Gamma_A \times \Gamma_B$，易知 $(z_1 - L_A)^{-1}|_{\mathscr{D}} = (z_1 - L_A)^{-1}$，$(z_2 - R_B)^{-1}|\mathscr{D} = (z_2 - R_B)^{-1}$，因此由 (3.2) 可知，$f(L_A, R_B)|\mathscr{D} = f(L^A|_D, R_B|_{\mathscr{D}})$。另外由定理 3.2 和谱映照定理知，$S_p(f(L_A, R_B)) = S_p(f(L_A|_{\mathscr{D}}, R_B|_{\mathscr{D}}))$，从而推得 $f(L_A, R_B)$ 正则充分必要条件是 $f(L_A, R_B)|\mathscr{D}$ 正则。

如果 $f(L_A, R_B)$ 在 $L(H)$ 上有逆 G，由于此时 $f(L_A, R_B)|\mathscr{D}$ 也可逆，且 $Gf(L_A, R_B) = I_{L(H)}$，易知这时 $\mathscr{D}$ 是 G 不变的。所以由逆的唯一性及 $(G|\mathscr{D}) f(L_A, R_B) = I_{\mathscr{D}}$ 可知，$(f(L_A, R_B)|\mathscr{D})^{-1} = f(L_A, R_B)^{-1}|\mathscr{D}$。证毕。

Lumer 等在[92]中证明了如果 $f(z)$ 是 $S_p(A) - S_p(B)$ 某邻域上的解析函数，则存在 $S_p(B)$ 的一个围道 Γ_B，使得

$$f(\mathscr{T}_{A,B})X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(A - \lambda)X(\lambda - B)^{-1} d\lambda, X \in L(H)。$$

下面的推论推广了这个结果，只要注意到可取

$$g(z_1, z_2) = f(z_1 - z_2)。$$

推论2.5 设 $g(z_1, z_2)$ 是 $S_p(A) \times S_p(B)$ 某邻域上的二元解析

函数，则存在$S_p(B)$的一个围道Γ_B，使得

$$g(L_A,R_B)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(A,\lambda)X(\lambda-B)^{-1}d\lambda, X\in L(H)。$$

证 $g(L_A,R_B)X$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B}g(z_1,z_2)(z_1-L_A)^{-1}(z_2-R_B)^{-1}X$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_B}g(L_A,z_2)(z_2-R_B)^{-1}Xdz_2$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_B}g(A,\lambda)X(\lambda-B)^{-1}d\lambda。$$ 证毕。

§3 初等算子与联合分类谱

设$A=(A_1,\cdots,A_n)$和$B=(B_1,\cdots,B_m)$为$L(H)$中的两组算子，则可导出$L(H)$上的左乘算子组$L_A=(L_{A_1},\cdots,L_{A_n})$和右乘算子组$R_B=(R_{B_1},\cdots,R_{B_m})$。这里我们将考虑$A$与$B$分别都是交换的情形，虽然下面个别结论对于非交换时也是成立的。

定理3.1 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$为Banach空间X上的交换算子组，$f=(f_1(z_1,\cdots,z_n),\cdots,f_m(z_1,\cdots,z_n))$是$C^n\to C^m$的多项式组，则有下面的谱映照：

$$\sigma_\pi(f(T))=f(\sigma_\pi(T));\ \sigma_\delta(f(T))=f(\sigma_\delta(T))。$$

证 由第二章定理知我们只须证明第一式。

设$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_\pi(T)$，则对任意$i=1,\cdots,m$，易知有

$$f_i(T_1,\cdots,T_n)-f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum_{j=1}^n(T_j-\lambda_j)Q_{ij}(T_1,\cdots,T_n)。$$

由于T是交换的，所以$f(\sigma_\pi(T))\subset\sigma_\pi(f(T_1))$。

反之，设$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)\in\sigma_\pi(f(T))$，则$\mu\in\sigma_p(f(T)^0)$，这里，$f(T)^0$表示$f(T)$的Berberian变换，而且有$f(T)^0=f(T^0)$。因此，

$M=\bigcap\limits_{i=1}^{m}\operatorname{Ker}(f_i(T)-\mu_i)\neq\{0\}$。显然 M 为 T^0 不变子空间。因为 $\sigma_p(T_1^0|M)=\sigma_\pi(T_1^0|_M)\neq\phi$，所以可取$\lambda_1\in\sigma_p(T_1^0|_M)$。因此$(\mu_1,\cdots,\mu_m,\lambda_1)\in\sigma_\pi(f(T)^0,T_1^0)$。用$(f(T),T_1)$代表$f(T)$，继续上面的过程，最后可得$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$使得 $(\mu_1,\cdots,\mu_m,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_\pi(f(T)^0,T^0)=\sigma_\pi(f(T),T)$，所以 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_\pi(T)$。又因为存在 $g\in X^0$，$g\neq 0$，使得 $f_i(T^0)g=\mu_i f$，$i=1,\cdots,m$；$T_j^0g=\lambda_jg$，$j=1,\cdots,n$，所以有 $\mu=f(\lambda)$。证毕。

引理3.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$和$B=(B_1,\cdots,B_m)$都是 Hilbert 空间 H 上的交换算子组。$L_A=(L_{A_1},\cdots,L_{A_n})$和$R_B=(R_{B_1},\cdots,R_{B_m})$分别为由 A、B 导出的 $L(H)$上的左、右乘算子组，则

(1)$\sigma_\pi(L_A,R_B)=\sigma_\pi(L_A^i,R_B^i)=\sigma_\pi(A)\times\sigma_\delta(B)$；

(2)$\sigma_\delta(L_A,R_B)=\sigma_\delta(L_A^i,R_B^i)=\sigma_\delta(A)\times\sigma_\pi(B)$，

这里(L_A^i,R_B^i)为(L_A,R_B)在 $c_i(H)$上的限制，$i=0,1,2$。

证 (1) 由引理2.1和第二章定理 4.22 知，$\sigma_\pi(L_A,R_B)=\sigma_\pi(L_A^0,R_B^0)$。因此下面只证 $i=0$ 的情况，而 $i=1,2$ 是类似的。

因为 $c_1(H)=H\otimes_\lambda\overline{H}$ 且 λ 是 Cross 范数，又由于 $\sigma_\delta(B)=\sigma_\pi(B')$，这里$B'$表示 B 的 Banach 共轭算子组，从定理 2.2 证明可以看出有

$$\sigma_\pi(A)\times\sigma_\delta(B)=\sigma_\pi(A)\times\sigma_\pi(B')\subset\sigma_\pi(A\otimes I,I\otimes B')=\sigma_\pi(L_A^0,R_B^0)。$$

反之，设 $(0,0)\in\sigma_\pi(L_A^0,R_B^0)$，则存在一列范数为 1 的紧算子$\{X_n\}$，使得 $A_iX_n\to 0$ 和 $X_nB_i\to 0(n\to\infty)$。我们可以选取这样一列向量$\{y_n\}\subset H$，$1/2\leqslant\|y_n\|\leqslant 2$，使得 $z_n=x_ny_n$ 的范数为1，$n=1,2,\cdots$。这样得到 $A_iz_n\to 0(n\to\infty)$，$i=1,\cdots,n$。类似可证，存在单位向量序列$\{z'_n\}$，使 $B_j^*z'_n\to 0(n\to\infty)$，$j=1,\cdots,m$。因此得到$0\in\sigma_\pi(A)$和 $0\in\sigma_\pi(B^*)$，从而 $0\in\sigma_\pi(B')=\sigma_\delta(B)$。这就证明了 $\sigma_\pi(L_A^0,R_B^0)\subset\sigma_\pi(A)\times\sigma_\delta(B)$。

(2) 只证 $i=0$。由引理 2.1，Banach 空间上共轭算子的谱定理以及刚才证得的（1），易知有下面等式成立：

$$\sigma_\delta(L_A^0, R_B^0)=\sigma_\pi((L_A^0)', (R_B^0)')=\sigma_\pi(R_A', L_B')$$
$$=\sigma_\delta(A)\times\sigma_\pi(B)\text{。证毕。}$$

C. Davis 和 R. Rosenthal 在[64]中证明了对于 H 中两个算子 A 和 B 有下列等式成立：

$$\sigma_\pi(\mathscr{T}_{A,B})=\sigma_\pi(A)-\sigma_\delta(B);\sigma_\delta(\mathscr{T}_{A,B})=\sigma_\delta(A)-\sigma_\pi(B),$$
$$\sigma_\pi(\mu_{A,B})=\sigma_\pi(A)\sigma_\delta(B);\qquad \sigma_\delta(\mu_{AB})=\sigma_\delta(A)\sigma_\pi(B)\text{。}$$

而这些结果现在可以推广为

推论3.3 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 和 $B=(B_1,\cdots,B_n)$ 为 Hilbert 空间 H 上的两个交换算子组，$P(z_1,\cdots,z_{n+m})$ 为 $C^{n+m}\to C$ 的复多项式，$R=P(L_A,R_B)$，则有

$$\sigma_\pi(R)=P(\sigma_\pi(A),\sigma_\delta(B)),\sigma_\delta(R)=P(\sigma_\delta(A),\sigma_\pi(B))\text{。}$$

证 由定理 3.1 与引理 3.2 立即可得。

最后我们再介绍 Curto 的一个结果[59]。

定理3.4 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 和 $B=(B_1,\cdots,B_n)$ 为 Hilbert 空间 H 上的交换算子组，定义 $L(H)$ 上的初等算子 $R: X\to\sum\limits_{i=1}^{n}A_iXB_i$，则有

$$S_p(R)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i;\alpha(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in S_p(A),\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in S_p(B)\right\}\text{。}$$

证 $S_p(R)$

$$=\sigma_\pi(R)\bigcup\sigma_\delta(R)$$
$$=\sigma_\pi(R,c_2(H))\bigcup\sigma_\delta(R,c_2(H))\qquad\text{(引理3.2)}$$
$$=S_p(R,c_2(H))$$
$$=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i;(\alpha,\beta)\in S_p(L_A,R_B,c_2(H))\right\}\text{(谱映照定理)}$$

$=\{\sum\alpha_i\beta_i:(\alpha,\beta)\in S_p(A\otimes I,I\otimes B',H\otimes\overline{H})\}$（定理1.10和引理2.1）

$=\{\sum\alpha_i\beta_i:\alpha\in S_p(A),\beta\in S_p(B')\}$（第六章定理2.3）

$=\{\sum\alpha_i\beta_i:\alpha\in S_p(A),\beta\in S_p(B)\}$。证毕。

以下我们将用定理3.4证明一些有益的结论，为此我们把定理3.4作形式上的修改。

推论3.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 和 $B=(B_1,\cdots,B_n)$ 分别为可分Hilbert空间 H 和 K 上的交换算子组，R 是 $L(K,H)$ 上的算子：$R(X)=\sum^n A_iXB_i$, $X\in L(K,H)$，则

$$S_p(R)=\{\sum\alpha_i\beta_i:\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in S_p(A),\beta\in(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in S_p(B)\}。$$

证 如果 $\dim H=\dim K=\infty$，则存在从 K 到 H 上酉算子 U。令 $\widehat{A}_j=U^*A_jU$，$j=1,\cdots,n$，则 $\widehat{A}=(\widehat{A}_1,\cdots,\widehat{A}_n)$ 是 K 上交换算子组。$S:X\to U^*X$ 是 $L(K,H)$ 到 $L(K)$ 的同构。由于由 $\widehat{A}$，B 导出的初等算子 $\widehat{R}$ 满足 $\widehat{R}=SRS^{-1}$，因此，我们有 $S_p(R)=S_p(\widehat{R})=\{\sum\alpha_i\beta_i:\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in S_p(\widehat{A}),\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in S_p(B)\}=\{\sum\alpha_i\beta_i:\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in S_p(A),\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in S_p(B)\}$。

若 H 和 K 中至少有一个为有限维，则设 H_0 为任一无限维可分的Hilbert空间，令 $\widehat{H}=H\otimes H_0$，$\widehat{K}=K\otimes H_0$，$\widehat{A}_j=A_j\otimes I$，$\widehat{B}_j=B_j\otimes I$。由于 $L(K\otimes H_0,H\otimes H_0)=L(K,H)\otimes L(H_0)$，因此由 $\widehat{A},\widehat{B}$ 引出的初等算子 $\widehat{R}$ 满足等式 $\widehat{R}=R\otimes I$。从而 $S_p(R)=S_p(\widehat{R})=\{\sum\alpha_i\beta_i:\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in S_p(\widehat{A}),\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in S_p(\widehat{B})\}=\{\sum\alpha_i\beta_i:\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in S_p(A),\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in S_p(B)\}$。证毕。

定理3.6 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 和 $B=(B_1,\cdots,B_n)$ 是可分Hilbert空间 H 上的交换正常算子组，并且满足 $\sum_{i=1}^n A_i^*A_i\leqslant I$，$\sum_{i=1}^n B_i^*B_i$

$\leqslant I$。若有算子 X，满足等式 $\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i = X$，则必有 $A_i X = X B_i^*$，$A_i^* X = X B_i$，$i=1,\cdots,n$。

证　设 E,F 分别是 A,B 的联合谱测度。显然 E 和 F 都集中在 C^n 中的闭单位球 $B_n = \left\{ z; z=(z_1,\cdots z_n), \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \leqslant 1 \right\}$。若 $\Delta \subset C^n$，记 $\Delta^* = \{z; \overline{z_1},\cdots,\overline{z_n}) \in \Delta\}$。设 Δ_1, Δ_2 是 B_n 中闭子集，而且 $\Delta_1 \cap \Delta_2^* = \phi$。由 $\sum A_i X B_i = X$ 得 $\sum E(\Delta_1) A_i X B_i F(\Delta_2) = E(\Delta_1) X F(\Delta_2)$。设 $H_1 = E(\Delta_1) H$，$H_2 = F(\Delta_2) H$，则上式变为 $\sum_{i=1}^{n} (E(\Delta_1) A_i |_{H_1})(E(\Delta_1) X|_{H_2})(F(\Delta_2) B_i |_{H_2}) = E(\Delta_1) X|_{H_2}$。由于 $\Delta_1 \cap \Delta_2^* = \phi$，必有 $1 \bar{\in} \{\sum \alpha_i \beta_i; \alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \in \Delta_1,\ \beta = (\beta_1,\cdots,\beta_n) \in \Delta_2\}$。对 $A|_{H_1} = (A_1|_{H_1},\cdots,A_n|_{H_1})$ 和 $B|_{H_2} = (B_1|_{H_2},\cdots,B_n|_{H_2})$，用推论 3.5 知 $S_p(R) \subset \{\sum \alpha_i \beta_i;\ \alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \in A|_{H_1},\ \beta = (\beta_1,\cdots\beta_n) \in B|_{H_2}) \subset \{\sum \alpha_i \beta_i;\ \alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2\}$，因此 $1 \in S_p(R)$。但 $R(E(\Delta_1) X|_{H_2}) = E(\Delta_1) X|_{H_2}$，从而 $E(\Delta_1) X|_{H_2} = 0$，即 $E(\Delta_1) \times F(\Delta_2) = 0$。由 Δ_1 和 Δ_2 的任意性，得知对任意 Borel 集 Δ，$XF(\Delta^*) \subset E(\Delta) H$，或者 $E(\Delta) XF(\Delta^*) = XF(\Delta^*)$。又由 $\sum_{i=1}^{n} B_i^* X^* A_i^* = X^*$，同样也有 $F(\Delta^*) X^* E(\Delta) = X^* E(\Delta)$，从而 $E(\Delta) XF(\Delta^*) = E(\Delta) X$，因此 $XF^*(\Delta) = E(\Delta) X$ 对任意 Borel 集 Δ 是成立的。设 F^* 是 $B^* = (B_1^*,\cdots,B_n^*)$ 的联合谱测度，显然有 $F^*(\Delta) = F(\Delta^*)$。这样 $XF^*(\Delta) = E(\Delta) X$。设 f，$g \in H$，则 $\langle A_i X f, g\rangle = \int \lambda_i d\langle EXf, g\rangle = \int \lambda_i d\langle XF^* f, g\rangle = \langle B_i^* f, X^* g\rangle = \langle XB_i^* f, g\rangle$，从而 $A_i X = X B_i^*$，$i=1,\cdots,n$。由Putnam-Fuglede 定理得 $A_i^* X = X B_i$，$i=1,\cdots,n$。证毕。

推论3.7　设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是 H 上交换的正常算子组，且 $\sum A_i^* A_i \leqslant I$。若有 $X \in L(H)$，使得$\sum A_i^* X A_i = X$，则 $A_i X = X A_i$，$i=1,\cdots,n$。

设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 H 上交换算子组。若有 $K\supset H$ 和 $\widehat{A}=(\widehat{A}_1,\cdots,\widehat{A}_n)$，使得 H 是 $\widehat{A}$ 的不变子空间，并且 $\widehat{A}_j|_H=A_j$，$j=1,\cdots,n$，$\sum\widehat{A}_j^*\widehat{A}_j\leqslant I$，则称 A 有联合压缩的正常延拓。

推论3.8 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 和 $B=(B_1,\cdots,B_n)$ 是 H 上交换算子组，且 A 和 B^* 有联合压缩的正常延拓。如果 $X\in L(H)$，$\sum A_iXB_i=X$，则 $A_iX=XB_i^*$，$A_i^*X=XB_i$，$i=1,\cdots,n$。

证　设 $\widehat{A}_j=\begin{pmatrix}A_j & A'_j\\ 0 & A''_j\end{pmatrix}$ 和 $\widehat{B}_j=\begin{pmatrix}B_j & 0\\ B'_j & B''_j\end{pmatrix}$ 是 A_j 和 B_j 的正常延拓。其中 A_j^2 定义在 H_1 上，B_j^2 定义在 H_2 上。

令 $\widetilde{A}_j=\begin{pmatrix}A_j & A'_j & 0\\ 0 & A''_j & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\widetilde{B}_j=\begin{pmatrix}B_j & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ B'_j & 0 & B''_j\end{pmatrix}$，$\widetilde{X}=\begin{pmatrix}X & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

则 $\widetilde{A}_j$ 和 $\widetilde{B}_j$ 定义在 $H\oplus H_1\oplus H_2$ 上，$j=1,\cdots,n$，并且 $\widetilde{X}$ 满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}\widetilde{A}_j\widetilde{X}\widetilde{B}_j$。这样由定理3.6得，$\widetilde{A}_i\widetilde{X}=\widetilde{X}\widetilde{B}_i^*$，$\widetilde{A}_i^*\widetilde{X}=\widetilde{X}\widetilde{B}_i$，$i=1,\cdots,n$。从而有 $A_iX=XB_i^*$，$A_i^*X=XB_i$，$i=1,\cdots,n$。证毕。

§4　初等算子的本质谱

初等算子的本质谱将由姜健飞首先在数学年刊中发表。这里我们将介绍李绍宽的另一学生季跃的工作[25]。他找到了交换算子组$(A_1,\cdots A_n)$，$(B_1,\cdots,B_n)$导出的左右乘算子组(L_A,R_B)的本质谱的表示，然后再用算子解析映算的谱映照定理得到了初等算子的本质谱的表达式。

引理4.1 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$，$B=(B_1,\cdots,B_n)$ 是 Hilbert 空间 H 上的交换算子组，$\{d_A^p\}_{p=0}^n$，$\{d_B^q\}_{q=0}^n$ 分别为它们导出的边界算子组，则 $0\in S_{pe}(A)\times S_p(B)$ 的充分必要条件为：存在 p,q，使

得下列二条件至少有一者成立：

(1) 存在非紧叙列 $\{f_m\}\subset(\mathrm{Im}d_A^{p+1})^{\perp}$，$\|f_m\|=1$ 以及 $g\in(\mathrm{Im}d_B^{q+1})^{\perp}$，$\|g\|=1$，使 $d_A^p f_m\to 0(m\to\infty)$，$d_B^q g=0$；

(2) 存在$\{f_m\}$ 同 (1) 以及非紧叙列$\{g_m\}$，$\|g_m\|=1$，使得 $d_A^p f_m\to 0(m\to\infty)$，$d_B^q g_m\to 0(m\to\infty)$。

证 由 $0\in S_{pe}(A)$ 知，一定存在 P 满足，或 $\mathrm{Im}d_A^p$ 不闭或 $\mathrm{Im}d_A^{p+1}$ 闭，而 $\mathrm{Ker}d_A^p\ominus\mathrm{Im}d_A^{p+1}$ 为无限维，由第二章引理知，不论哪种情况，总存在非紧序列$\{f_m\}$，$\|f_m\|=1$，使得 $d_A^p f_m\to 0$。

而对于 $0\in S_p(B)$ 知存在 q，使 $\mathrm{Im}d_B^q$ 不闭或者 $\mathrm{Im}d_B^q$ 闭，但 $\mathrm{Im}d_B^{q+1}\neq\mathrm{Ker}d_B^q$，而第一种情况使得 (2) 中条件得到满足，第二种情况使 (1) 得到满足。由此知条件 (1)、(2) 之一成立，反之是显然的。证毕。

命题 4.2 $A=(A_1,\cdots,A_n)$，$B=(B_1,\cdots B_n)$是交换的算子组，则 $S_p(A)\times S_{pe}(B)\bigcup S_{pe}(A)\times S_p(B)\subset S_{pe}(L_A,R_B)$。

证明 我们只需证 $S_{pe}(A)\times S_p(B)\subset S_{pe}(L_A,R_B)$。记 B^* 是 B 的 Banach 共轭算子组，由第二章知 $S_p(B)=S_p(B^*)$，故我们只需对 $S_{pe}(A)\times S_p(B^*)$加以证明即可。

设 $0\in S_{pe}(A)\times S_p(B^*)$，我们要证 $0\in S_{pe}(L_A,R_B)$。由引理 3.1 我们只需讨论 (1)、(2) 两种情况即可。

(1) 存在非紧序列 $\{f_m\}$，$\|f_m\|=1$，$f_m\in(\mathrm{Im}d^{p+1})^{\perp}$，$g\in(\mathrm{Im}d_{B^*}^{q+1})^{\perp}$，$\|g\|=1$，使得$d_A^p f_m\to 0$，$d_{B^*}^q g=0$。令$X_m=f_m\otimes g_m$，则$\|X_m\|=1$。设$\{d^r\}_{r=0}^{2n}$为$(L_A,R_B)$ 的边界算子，则直接验证可知 $d^{p+q}X_m=d_{L_A}^p X_m+(-1)^p d_{R_B}^q X_m=(d_A^p f_m)\otimes g+(-1)^p f_m\otimes d_{B^*}^q g\to 0$，$(m\to\infty)$。我们来证明$\{X_m\}$在 $E_{p+q}/\mathrm{Im}d^{p+q+1}$ 中是非紧的。$\{f_m\}$ 是非紧的，故我们可不妨设 $\mathrm{dist}(f_m,\mathrm{span}(f_1,\cdots,f_{m-1}))\geqslant a>0$。这样任意 $m\neq m'$，$|\langle f_m,f_{m'}\rangle|\geqslant\sqrt{1-a^2}$。以下我们证明 $\|X_m-X_{m'}+\mathrm{Im}d^{p+q+1}\|\geqslant 1-\sqrt{1-a^2}$。事实上设 $d_{L_A}^{p+1}Y_1+(-1)^p d_{R_B}^{q+1}Y_2\in$

$\mathrm{Im}d^{p+q+1}$，则$\|X_m - X_{m'} + d_{L_A}^p Y_1 + (-1)^q d_{R_B} Y_2\|$。

$$\|X_m - X_{m'} + d_{L_A}^p Y_1 + (-1)^q d_{R_B} Y_2\|$$
$$\geq |\langle (X_m - X_{m'} + d_{L_A}^p Y_1 + (-1)^q d_{R_B} Y_2) g, f_m \rangle|$$
$$= |\langle f_m - f_{m'} + d_{L_A}^p Y_1 g + (-1)^q d_{R_B} Y_2 g, f_m \rangle|$$
$$= |\langle f_m - f_{m'}, f_m \rangle + \langle d_A^{p+1}(Y, g) f_m \rangle + \langle g, d_{B*}^{q+1} Y_2^* f_m \rangle|$$
$$\geq 1 - |\langle f_{m'}, f_m \rangle|$$
$$\geq 1 - \sqrt{1-a^2}。$$

注意上面运算用到等式$(d_{L_A}^{p+1}T)g = d_A^{p+1}(Tg)$，$(d_{R_B}^{q+1}T)^* = d_{L_{B*}}^{q+1}T^*$以及$f_m \in (\mathrm{Im}d_A^{p+1})^{\perp}$和$g \in (\mathrm{Im}d_{B*}^{q+1})^{\perp}$。这样$\{X_m\}$必是非紧的，从而$\mathrm{Im}d^{p+q+1}$非闭或者$\mathrm{Ker}d^{p+q}/\mathrm{Im}d^{p+q+1}$是无限维的，于是必有$0 \in S_{pe}(L_A, R_B)$。

(2) 存在非紧叙列$\{f_m\}$，$\|f_m\| = 1$，$f_m \in (\mathrm{Im}d_A^{p+1})^{\perp}$，非紧叙列$\{g_m\}$，$\|g_m\| = 1$，使$d_A^p f_m \to 0$，$d_{B*}^q g_m \to 0$，$(m \to \infty)$。令$X_m = g_m \otimes g_m$，则亦易知$d^{p+q} X_m \to 0$。用 (1) 一样的方法可以证明$\{X_m + \mathrm{Im}d^{p+q+1}\}$在$E_{p+q}/\mathrm{Im}d^{p+q+1}$中是非紧的，从而得到$0 \in S_{pe}(L_A, R_B)$。证毕。

为证明以下的主要定理，我们还需引理3.3，其证明可按[6]一样的方法证明。

引理4.3 设X, Y, Z为三个Banach空间，并且Y可补，又$A \in L(X, Z)$，$B \in L(Y, Z)$，且$\mathrm{Im}A \subset \mathrm{Im}B$，则存在$C \in L(X, Y)$，使得$A = BC$。

定理4.4 设$A = (A_1, \cdots, A_n)$和$B = (B_1, \cdots, B_n)$为Hilbert空间H上的交换算子组，则我们有

$$S_{pe}(L_A, R_B) = S_p(A) \times S_{pe}(B) \bigcup S_{pe}(A) \times S_{\iota}(B)。$$

证 包含关系"$\supset$"已由命题3.8所证，下面我们证明反包含关系"$\subset$"。即证当A、B均为Fredholm时，(L_A, R_B)亦为Fredholm。

设A, B^*为Fredholm，对于任意$X \in A^r[(s \cup t), L(H)]$，$X =$

$\sum\limits_{p+q=r} X_{p,q}$，$X_{p,q}=f_{p,q}s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\wedge t_{i_1}\wedge\cdots\wedge t_{i_q}$，则

$$d^rX=\sum(d_{L_A}^pX_{p,q}+(-1)^{p-1}d_{R_B}^{q-1}X_{p-1,q+1}),$$

若 $X\in\mathrm{Ker}d^r$，则对一切 $p,q,p+q=r$，均有

$$d_{L_A}^pX_{p,q}+(-1)^{p-1}d_{R_B}^{q+1}X_{p-1,q+1}=0。$$

我们对 r 分三种不同情况进行讨论：

(1) $0\leqslant r\leqslant n$。设 $X\in\mathrm{Ker}d^r$，则 $X_r=X_{r,0}\oplus\cdots\oplus X_{0,r}$。

我们用归纳法证明：存在 w_{r+1} 使得

$$X=d^{r+1}w_{r+1}+\sum P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q},\qquad (*)$$

其中 P_{N_p} 为 $N_p=\mathrm{Ker}d_A^p\ominus\mathrm{Im}d_A^{p+1}$ 的投影，P_{M_q} 为 $\mathrm{Ker}d_{B*}^q\ominus\mathrm{Im}d_{B*}^{q+1}$ 的投影。

因为 $H=\mathrm{Im}d_{B*}^1\oplus M_0$，由引理3.3，存在 $Z_{r,1}$ 使得

$$X_{r,0}=(-1)^rd_B^1Z_{r,1}+X_{r,0}P_{M0},\qquad (4.1)$$

由(*)式知：$d_{L_A}^rX_{r,0}+(-1)^{r-1}d_{R_B}^1X_{r-1,1}=0$，于是有

$$d_{R_B}^1((-1)^rd_{L_A}^rZ_{r,1}+(-1)^{r-1}X_{r-1,1})+d_{L_A}^rX_{r,0}P_{M_0}=0。$$

由于上式左边为直和，故 $d_{L_A}^rX_{r,0}P_{M_0}=0$。同样用引理 3.3得 $Z_{r+1,0}$ 使得

$$X_{r,0}P_{M_0}=d_{L_A}^{r+1}Z_{r+1,0}+P_{N_r}X_{r,0}P_{M_0}。\qquad (4.2)$$

又由 $d_{R_B}^1((-1)^rd_{L_A}^rZ_{r,1}+(-1)^{r-1}X_{r-1,1})=0$ 知，存在$Z_{r-1,2}$使得

$$X_{r-1,1}=d_{L_A}^rZ_{r,1}(I-P_{M_1})+(-1)^{r-1}d_{R_B}^2Z_{r-1,2}+X_{r-1,1}P_{M_1}。\quad (4.3)$$

把上式代入 $d_{L_A}^{r-1}X_{r-1,1}+(-1)^{r-2}d_{RB}^2X_{r-2,2}=0$ 得

$$d_{RB}^2((-1)^{r-1}d_{LA}^{r-1}Z_{r-1,2}+(-1)^{r-2}X_{r-2,2})+d_{LA}^{r-1}X_{r-1,1}P_{M_1}=0,$$

这样得到 $d_{L_A}^{r-1}X_{r-1,1}P_{M_1}=0$。

由此推得存在 $Z'_{r,1}$，使得

$$X_{r-1,1}P_{M_1}=d_{L_A}^rZ'_{r,1}+P_{N_{r-1}}X_{r-1}P_{M_1}$$
$$=d_{L_A}^rZ'_{r,1}P_{M_1}+P_{N_{r-1}}X_{r-1}P_{M_1}。\qquad (4.4)$$

又因为 $d_{R_B}^2((-1)^{r-1}d_{L_A}^{r-1}Z_{r-1,2}+(-1)^{r-2}X_{r-2,2})=0$，

所以有 $Z_{r-2,3}$，使得

$$X_{r-2,2}=d_{L_A}^{r-1}Z_{r-1,2}(I-P_{M_2})+(-1)^{r-2}d_{R_B}^{3}Z_{r-2,3}+X_{r-2,2}P_{M_2}。 \quad (4.5)$$

令 $w_{r+1,0}=Z_{r+1,0}$，$w_{r,1}=Z_{r,1}(I-P_{M_1})+Z'_{r;1}P_{M_1}$，联立（4.1）～～（4.5），

$$X_{r,0}=d_{L_A}^{r+1}w_{r+1,0}+(-1)^{r}d'_{R_B}w_{r,1}+P_{N_r}X_{r,0}P_{M_0},$$

$$X_{r-1,1}=d_{L_A}^{r}w_{r,1}+(-1)^{r-1}d_{R_B}^{2}Z_{r-1,2}+P_{N_{r-1}}X_{r-1,1}P_{M_1},$$

$$X_{r-2,2}=d_{L_A}^{r-1}Z_{r-1,2}(I-P_{M_2})+(-1)^{r-2}d_{R_B}^{3}Z_{r-2,3}+X_{r-2,2}P_{M_2}。$$

假设已有 $X_{p+1,q-1}$

$$=d_{L_A}^{p+2}w_{p+2,q-1}+(-1)^{p+1}d_{R_B}^{q}Z_{p+1,q}+P_{N_{p+1}}X_{p+1,q-1}P_{M_{q-1}}, \quad (4.6)$$

$$X_{p,q}=d_{L_A}^{p+1}Z_{p+1,q}(I-P_{M_q})+(-1)^{p}d_{R_B}^{q+1}Z_{p,q+1}+P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q} \quad (4.7)$$

将（4.7）代入*式可得

$$d_{R_B}^{q+1}((-1)^{p}d_{L_A}^{p}Z_{p,q+1}+(-1)^{p-1}X_{p-1,q+1})+d_{L_A}^{p}X_{p,q}P_{Mq}=0,$$

得 $d_{L_A}^{p}X_{p,q}P_{M_q}=0$。

由引理 4.3，存在 $Z'_{p+1;q}$ 使得

$$X_{p,q}P_{M_q}=d_{L_A}^{p+1}Z'_{p+1;q}+P_{Np}X_{p,q}P_{Mq}=d_{L_A}^{p+1}Z'_{p+1;q}P_{Mq}+P_{Np}X_{p,q}P_{Mq}, \quad (4.8)$$

又由 $d_{R_B}^{q+1}((-1)^{p}d_{L_A}^{p}Z_{p,q+1}+(-1)^{p-1}X_{p-1,q+1})=0$ 得 $Z_{p-1,q+2}$ 使

$$X_{p-1,q+1}=d_{L_A}^{p}Z_{p,q+1}(I-P_{Mq+1})+(-1)^{p-1}d_{R_B}^{q+2}Z_{p-1,q+2}+X_{p-1,q+1}P_{Mq+1}。 \quad (4.9)$$

令 $w_{p+1,q}=Z_{p+1,q}(I-P_{Mq})+Z'_{p+1;q}P_{Mq}$，联立（4.6）～(4.9)即得

$$\begin{cases} X_{p+1,q-1}=d_{L_A}^{p+2}w_{p+2,q-1}+(-1)^{p+1}d_{R_B}^{q}w_{p+1,q} \\ \qquad +P_{Np+1}X_{p+1,q-1}P_{Mq-1} \\ X_{p,q}=d_{L_A}^{p+1}w_{p+1,q}+(-1)^{p}d_{R_B}^{q+1}Z_{p,q+1}+P_{Np}X_{p,q}P_{Mq} \\ X_{p-1,q+1}=d_{L_A}^{p}Z_{p,q+1}(I-P_{Mq+1})+(-1)^{p-1}d_{R_B}^{q+2}Z_{p-1,q+2} \\ \qquad +X_{p-1,q+1}P_{Mq+1} \end{cases}$$

于是证明了当 $0\leqslant r<n$ 时，存在 $w_r=\sum\limits_{s+t=p+q+1}w_{s,t}$，使得一切 $p+q=$

r，我们有

$$X_{p,q}=d_{L_A}^{p+1}w_{p+1,q}+(-)^p d_{R_B}^{q+1}w_{p,q+1}+P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q},$$

即 $$X=\sum X_{p,q}=d^r w+\sum_{p+q=r}P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q},$$

或 $H^r(L(H),(L_A,R_B))=\{\sum P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q};X_{p,q}\in\Lambda^{p,q}[(s\cup t),L(H)]\}$。

(2) $r=n$。$X=X_{n,0}\oplus X_{n-1,1}\oplus\cdots\oplus X_{0,n}\in\mathrm{Ker}d^n$，则用与 (1) 同样的方法可以证明存在 $w=w_{n,1}\oplus\cdots\oplus w_{1,n}$，使得

$$X_{n,0}=(-1)^n d'_{R_B}w_{n,1}+P_{N_n}X_{n,0}P_{M0},$$

$$\cdots$$

$$X_{p,q}=d_{L_A}^{p+1}w_{p+1,q}+(-1)^p d_{R_B}^{q+1}w_{p,q+1}+P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q},$$

$$\cdots\cdots$$

$$X_{0,n}=d'_{L_A}w_{1,n}+P_{N0}X_{0,n}P_{M_n},$$

这样 $X=d^{n+1}w+\sum_{p+q=n}P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q}$，同样可得到

$H^n(L(H),(L_A,R_B))=\{\sum P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q}:X_{p,q}\in\Lambda^{p,q}[(s\cup t),L(H)]$。

(3) $n<r\leqslant 2n$，$X=X_{n,r-n}\oplus\cdots\oplus X_{r-n,n}\in\mathrm{Ker}d^r$，则由(*)得

$$\begin{cases} d_{L_A}^{r-n}X_{r-n,n}=0 \\ d_{L_A}^{p}X_{p,q}+(-1)^{p-1}d_{R_B}^{q+1}X_{p-1,q+1}=0,\ p+q=r \\ d_{R_B}^{r-n}X_{n,r-n}=0 \end{cases}$$

由第三式知，存在 $Z_{n,r-n+1}$，使

$$X_{n,r-n}=(-1)^n d_{R_B}^{r-n+1}Z_{n,r-n+1}+P_{N_n}X_{n,r-n}P_{M_{r-n}},$$

再依 (1) 法递推可得：$w=w_{n,r-n+1}\oplus\cdots\oplus w_{r-n+1,n}$，使得

$$X_r=d^r w+\sum P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q}。$$

于是，也有 $H^r(L(H),(L_A,R_B))=\{\sum P_{N_p}X_{p,q}P_{M_q}:X_{p,q}\in\Lambda^{p,q}[(s\cup t),L(H)]$。综合 (1)、(2)、(3) 可知，对一切 r，$\mathrm{Im}d^r$ 具有闭值域且 $\dim H^r=\sum_{p+q=r}\dim N_p\cdot\dim M_q<\infty$，于是 (L_A,R_B) 为 Fredholm 算子组。证毕。

有了定理4.4，我们用解析演算的谱映照定理就有了初等算子的本质谱表达式。

定理4.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$和 $B=(B_1,\cdots,B_n)$是Hilbert空间 H 上的交换算子组，R 是由 A,B 导出的初等算子，则

$$Sp_e(R)=\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j:\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n),\right.$$

$$\left.(\alpha,\beta)\in Sp_e(A)\times Sp(B)\right\}$$

或$(\alpha,\beta)\in Sp(A)\times Sp_e(B)\}$。

第八章　闭算子组的联合谱

§1　引　言

在本章中我们将讨论闭算子组的联合谱。首先引起兴趣的是应该怎样定义无界算子组的联合谱，使它成为J.L. Taylor所定义的有界算子组的联合谱的自然而合理的推广。

回忆单个算子的情况，设A为Banach空间X到自身的线性算子（不一定有界）。

定义　若$z-A$为一对一的，且$(z-A)^{-1}\in L(X)$，则称z为A的豫解值($z\in\rho(A)$)；否则称z属于A的谱($z\in\sigma(A)$)。

当$(z-A)^{-1}\in L(X)$时，$(z-A)^{-1}$为闭算子，因而A为闭算子。因此当A不是闭算子时$\rho(A)$为空集，整个复平面都是A的谱。这时，我们很难用$\sigma(A)$来反映A的特性。因此我们感兴趣的主要是研究闭算子的谱。上述定义可以换成本质上相同的另一种形式：

定义　若$z-A$为一对一的，它的值域在X中稠密，而且$(z-A)^{-1}$在此值域上连续，则称z为A的豫解值($z\in\rho(A)$)；否则称z为A的谱($z\in\sigma(A)$)。

对于闭算子A_1，若$D\subset D(A_1)$为A_1的任何一个核心（即每个$f\in D(A_1)$，存在$f_n\in D$，使$f_n\to f$，$A_1f_n\to Af$），记$A=A_1|_D$那么容易证明：按照前一定义，z为A_1的豫解值的充要条件是按照后一定义，z为A的豫解值。这样，对于可闭算子A来说，如果$(z-\overline{A})^{-1}\in L(X)$，我们就可以称$z$为$A$的一个豫解值。

对于可闭算子，由单个算子$z-A$所组成的算子组的Koszul

复形为

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{d} X\longrightarrow 0,$$

在此边界算子 d 就是算子 $z-A$。从以上分析可以知道，$z\in\rho(A)$ 当且仅当$(z-\overline{A})^{-1}\in L(X)$，因而当且仅当复形

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{\overline{d}} X\longrightarrow 0$$

为正合的。

仿此，对算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$而言，若 Koszul 复形

$$0\longrightarrow E_n^n(X)\xrightarrow{\overline{d_n}} E_{n-1}^n(X)\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow E_1^n(X)\xrightarrow{\overline{d_1}} 0$$

为正合的，那么我们就可以认为 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 为 A 的豫解值。也就是对可闭算子组来说，用边界算子的闭包$\overline{d_p}(z-A)$ 来定义正则性，也许是合理的。但是，我们不知道，分别用 $d_p(z-A)$ 和 $\overline{d_p}(z-A)$ 两种方法定义正则性是否会有本质差别，特别是对闭算子组来说二者是否一致也得不到证明。Eschmiev 在［73］中对 $\rho(T)\neq\phi$ 中的情况是用 $\delta_p(z-A)$ 定义正则的，我们也不知这两种正则性是否一致。

§2 闭算子联合谱的定义

为方便，以下仅考虑 Hilbert 空间。设 H 是复Hilbert 空间，$A=(A_1,\cdots,A_n)$为 H 上稠定闭算子组。令 $D_0=H$，对于不大于 n 的p个自然数$j_1<j_2<\cdots<j_p$，令$D_{j_1\cdots j_p}=\left\{x\in\bigcap_{i=1}^{p}D(A_{j_i}),\ A_{j_i}x\in D_{j_1\cdots\hat{j_i}\cdots j_p}\right\}$。类似地对于 $A^*=(A_1^*,\cdots,A_n^*)$，定义 $D_0^*,D_{j_1\cdots j_p}^*$，显然，当$\{j_1,\cdots j_p\}\supset\{i_1,i_2,\cdots,i_q\}$时，有 $D_{j_1\cdots j_p}\subset D_{i_1\cdots i_q}$，和 $D_{j_1\cdots j_p}^*\subset D_{i_1\cdots i_q}^*$。

在本章我们总假设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 满足条件（*）。

(1) 当 $x\in D(A_iA_j)\bigcap D(A_jA_i)$ 时，有

$$A_iA_jx=A_jA_ix;$$

$$(2)\quad \overline{D_{1,2,\cdots,n}\bigcap D^*_{1,2,\cdots,n}}=H。$$

我们记 $E_p^n(A,H)=\underset{j_1\cdots j_p}{\oplus}D_{j_1\cdots j_p}\otimes(s_{j_1}\wedge s_{j_2}\wedge\cdots\wedge s_{j_p})$。显然，$E_p^n(A,H)$在 $E_p^n(H)$中稠密。

对于 $x\in D_{j_1\cdots j_p}$，我们令

$$d_p(A)(xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p})=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}A_{j_i}xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{s_{j_i}}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}。$$

这样，对于每个 p，定义了一个$E_p^n(A,H)$到$E_{p-1}^n(A,H)$的线性映照$d_p(A)$。使用简单的计算可以证明：$d_p\cdot d_{p+1}=0$。因此$\{E_p^n(A,H),d_p(A)\}$是一个链复形，$d_p(A)$是边界算子。

命题2.1 对于每个 p，$d_{p+1}(A)$是可闭的。

证明 因为 $E_{p+1}^n(A,H)$在 $E_{p+1}^n(H)$ 中稠密，所以 $d_{p+1}^*(A)$存在。对于任一固定的$xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\in D^*_{i_1\cdots i_q}\otimes(s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_q})$，这里$\{i_1,\cdots,i_q\}=\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{j_1,\cdots,j_p\}$，$\sum\limits_{k_1\cdots k_{p+1}}y_{k_1\cdots k_{p+1}}s_{k_1}\wedge\cdots\wedge s_{k_{p+1}}\in E_{p+1}^n(A,H)$，有

$$\left\langle d_{p+1}\sum_{k_1\cdots k_{p+1}}y_{k_1\cdots k_{p+1}}s_{k_1}\wedge\cdots\wedge s_{k_{p+1}},\ xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\right\rangle$$
$$=\left\langle\sum_{k_1\cdots k_{p+1}}y_{k_1\cdots k_{p+1}}s_{k_1}\wedge\cdots\wedge s_{k_{p+1}},\ \sum_{l=1}^{n-p}A^*_{i_l}xs_{i_l}\wedge s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\right\rangle。$$

因此 $xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\in D(d_{p+1}^*(A))$且

$$d_{p+1}^*(A)xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}=\sum_{l=1}^{n-p}A^*_{i_l}s_{i_l}\wedge s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p},$$

由此可知 $D(d_{p+1}^*(A))\supset\underset{i_1\cdots i_p}{\oplus}(D^*_{j_1\cdots j_{n-p}}\otimes s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_p})$，这里$\{j_1,\cdots,j_{n-p}\}=\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{i_1,\cdots,i_p\}$。因而$d_{p+1}^*(A)$为$E_p^n(H)\to E_{p+1}^n(H)$的稠定闭算子，这样$d_{p+1}^{**}(A)$存在，且$d_{p+1}^{**}(A)=\overline{d_{p+1}}(A)$，即 $d_{p+1}(A)$ 是可闭的。

命题 2.2 $\{D(\overline{d_p}),\overline{d_p}\}$ 是一个链复形。

证 因为 $(\mathrm{Im}d_{p+1})^{\perp}=\mathrm{Ker}d^*_{p+1}$ 和 $\mathrm{Im}d_{p+1}\subset\mathrm{Ker}d_p$，我们有 $\mathrm{Ker}d^*_{p+1}=(\mathrm{Im}d_{p+1})^{\perp}\supset(\mathrm{Ker}d_p)^{\perp}\supset(\mathrm{Ker}\overline{d_p})^{\perp}=\mathrm{Im}d^*_p$。于是，$\{D(d^*_{p+1}),d^*_{p+1}\}$是一个上链复形。由$\mathrm{Ker}d^*_{p+1}\supset\mathrm{Im}d^*_p$可知$\mathrm{Im}\overline{d_{p+1}}\subset\mathrm{Ker}\,\overline{d_p}$。即$\{D(\overline{d_p}),\overline{d_p}\}$ 是链复形。

定义 2.3 如果链复形 $\{D(\overline{d_p}),\overline{d_p}\}$ 正合，我们称$A=(A_1,\cdots,A_n)$是正则的；对于 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$，如果算子组 $z-A=(z_1-A_1,\cdots,z_n-A_n)$ 是正则的，那么我们称z在A的豫解集中，否则称 z 为 A 的一个谱点($z\in S_p(A)$)。

§3 基本性质

命题3.1 如果 A 正则，则对每一个 p，有

$$\mathrm{Im}\overline{d_{p+1}}=\overline{\mathrm{Im}d_{p+1}}=\overline{\mathrm{Ker}d_p}=\mathrm{Ker}\ \overline{d_p}。$$

证明 对任一$\eta_0\in\mathrm{Im}\overline{d_{p+1}}$，存在$\xi_0\in D(\overline{d_{p+1}})$满足$\overline{d_{p+1}}\xi_0=\eta_0$，即存在一列$\{\xi_m\}\subset D(d_{p+1})$，满足$\xi_m\to\xi_0,d_{p+1}\xi_m\to\eta_0(m\to\infty)$。因此$\eta_0\in\overline{\mathrm{Im}d_{p+1}}$和$\mathrm{Im}\overline{d_{p+1}}\subset\overline{\mathrm{Im}d_{p+1}}$。因为$\mathrm{Ker}d_p\subset\mathrm{Ker}\overline{d_p}$和$\mathrm{Ker}\overline{d_p}$是闭集，所以$\overline{\mathrm{Ker}d_p}\subset\mathrm{Ker}\overline{d_p}$。

另一方面$\overline{\mathrm{Im}d_{p+1}}\subset\overline{\mathrm{Ker}d_p}$显然成立，因此我们有

$\mathrm{Im}\overline{d_{p+1}}\subset\overline{\mathrm{Im}d_{p+1}}\subset\overline{\mathrm{Ker}d_p}\subset\mathrm{Ker}\overline{d_p}$。

当 A 正则时，$\mathrm{Im}\overline{d_{p+1}}=\mathrm{Ker}\overline{d_p}$，于是四者相等。证毕。

在空间$\widetilde{H}=\oplus E^*_p(H)$上我们定义算子 $a(A)$，

$D(a(A))=\underset{p}{\oplus}[D(\overline{d_p})\cap D(d^*_{p+1})]$，

$$\alpha(A)=\begin{bmatrix} 0 & d_n^* & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \overline{d_n} & 0 & d_{n-1}^* & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \overline{d_{n-1}} & 0 & d_{n-2}^* & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{d_1} & 0 \end{bmatrix}$$

命题3.2 $\alpha(A)$是$\widetilde{H}$上自共轭算子。

证　对任何$\xi,\eta\in D(\alpha(A))$，由计算可以知道

$\langle\alpha(A)\eta,\xi\rangle=\langle\eta,\alpha(A)\xi\rangle$，因此$\alpha(A)$是对称算子。对每个$p$，$D(\overline{d_p})\cap D(d_{p+1}^*)=F_p\oplus G_p=M_p\oplus N_p$，在此

$$F_p=\mathrm{Ker}\overline{d_p}\cap D(d_{p+1}^*),\quad G_p=\overline{\mathrm{Im}d_p^*}\cap D(\overline{d_p}),$$

$$M_p=\mathrm{Ker}d_{p+1}^*\cap D(\overline{d_p}),\quad N_p=\overline{\mathrm{Im}\overline{d_{p+1}}}\cap D(d_{p+1}^*),$$

而且F_p,G_p,M_p,N_p满足性质

(1) $\overline{d_p}(F_p)=d_{p+1}^*(G_p)=\overline{d_p}(N_p)=d_{p+1}^*(M_p)=\{0\}$;

(2) $\overline{d_p}(G_p)=\overline{d_p}(M_p)=\mathrm{Im}\overline{d_p}$。

接下来要证明$D(\alpha(A)^*)\subset D(\alpha(A))$。对于任何一个$\xi\in D(\alpha(A)^*)$，存在$h\in\widetilde{H}$，使得对于所有的$\eta\in D(\alpha(A))$，有

$$\langle\alpha(A)\eta,\xi\rangle=\langle\eta,h\rangle。$$

设$\xi=\xi_n\oplus\cdots\oplus\xi_0$，$h=h_n\oplus\cdots\oplus h_0$，其中$\xi_p$，$h_p\in E_p^*(H)$。对于任何固定的$p$和任何$\eta_p\in D(\overline{d_p})\cap D(d_{p+1}^*)$，我们令$\eta=0\oplus\cdots\oplus0\oplus\eta_p\oplus0\oplus\cdots\oplus0$，由等式（*）得

$$\langle d_{p+1}^*\eta_p,\xi_{p+1}\rangle+\langle\overline{d_p}\eta_p,\xi_{p-1}\rangle=\langle\eta_p,h_p\rangle。\qquad(**)$$

设$\xi_{p+1}=\xi_{p+1}^{(1)}\oplus\xi_{p+1}^{(2)}$，$\xi_{p-1}=\xi_{p-1}^{(1)}\oplus\xi_{p-1}^{(2)}$，$\eta_p=\eta_p^M\oplus\eta_p^N$和$h_p=h_p^{(1)}\oplus h_p^{(2)}$，其中$\xi_{p+1}^{(1)}\in\mathrm{Ker}\overline{d_{p+1}}$，$\xi_{p+1}^{(2)}\in\overline{\mathrm{Im}d_{p+1}^*}$，$\xi_{p-1}^{(1)}\in\mathrm{Ker}\overline{d_{p-1}}$，

$\xi^{(2)}_{p-1}\in\overline{\mathrm{Im}d^*_{p-1}}$，$\eta^M_p\in M_p$，$\eta^N_p\in N_p$，$h^{(1)}_p\in\mathrm{Ker}\bar{d}^*_{p+1}$，$h^{(2)}_p\in\overline{\mathrm{Im}\bar{d}_{p+1}}$。

则对所有的 $\eta_p\in D(\bar{d}_p)\bigcap D(\bar{d}^*_{p+1})$，从（**）式可得：

$$\langle\bar{d}^*_{p+1}\eta_p,\xi^{(2)}_{p+1}\rangle=\langle\bar{d}^*_{p+1}\eta^N_p,\xi^{(2)}_{p+1}\rangle=\langle\bar{d}^*_{p+1}\eta^N_p,\xi_{p+1}\rangle$$
$$=\langle\eta^N_p,h_p\rangle=\langle\eta^N_p,h^{(2)}_p\rangle=\langle\eta_p,h^{(2)}_p\rangle。$$

因此对任何 $\overline{\eta_p}=\eta'_p\oplus\eta_p\in D(\bar{d}^*_{p+1})$，这里 $\eta'_p\in\mathrm{Ker}\bar{d}^*_{p+1}$，$\eta_p\in\overline{\mathrm{Im}\bar{d}_{p+1}}\bigcap D(\bar{d}^*_{p+1})$，我们有 $\langle\bar{d}^*_{p+1}\overline{\eta_p},\xi^{(2)}_{p+1}\rangle=\langle\bar{d}^*_{p+1}\eta_p,\xi^{(2)}_{p+1}\rangle=\langle\eta_p,h^{(2)}_p\rangle=\langle\overline{\eta_p},h^{(2)}_p\rangle$。这样 $\xi^{(2)}_{p+1}\in D(\bar{d}_{p+1})\bigcap\overline{\mathrm{Im}\bar{d}^*_{p+1}}=G_{p+1}$。

类似可证 $\xi^{(1)}_{p-1}\in D(\bar{d}^*_p)\bigcap\mathrm{Ker}\bar{d}_{p-1}=F_{p-1}$。因为 p 是任意的，所以对每个 p，$\xi_p\in F_p\oplus G_p=D(\bar{d}_p)\bigcap D(\bar{d}^*_{p+1})$，$\xi\in D(\alpha(A))$。证毕。

定理3.3 $A(A_1,\cdots,A_n)$是正则的充要条件是$(\alpha(A))^{-1}\in L(\widetilde{H})$。

证　必要性　因为对每个 p，$\mathrm{Ker}\bar{d}_p=\overline{\mathrm{Im}\bar{d}_{p+1}}$，所以 $\mathrm{Im}\bar{d}^*_p=\mathrm{Ker}\bar{d}^*_{p+1}$ 且 $E^n_p(H)=\mathrm{Im}\bar{d}_{p+1}\oplus\mathrm{Im}\bar{d}^*_p$，由此可知，$\alpha(A)$ 是满的，因而$(\alpha(A))^{-1}\in L(\widetilde{H})$。

充分性　对任何 $\xi_p\in\mathrm{Ker}\bar{d}_p$，令 $\xi=0\oplus\cdots\oplus0\oplus\xi_p\oplus\cdots\oplus0$，则存在 $\eta=\eta_n\oplus\cdots\oplus\eta_0\in D(\alpha(A))$，使 $\alpha(A)\eta=\xi$，这样，$\bar{d}_{p+1}\eta_{p+1}+\bar{d}^*_p\eta_{p-1}=\xi_p$，由$\bar{d}^*_p\eta_{p-1}\in\mathrm{Im}\bar{d}^*_p$ 和 $\bar{d}_p\eta_{p+1}$，$\xi_p\in\mathrm{Ker}\bar{d}_p$，得 $\bar{d}^*_p\eta_{p-1}=0$，因此 $\bar{d}_{p+1}\eta_{p+1}=\xi_p$，$\{D(\bar{d}_p),\bar{d}_p\}$正合。证毕。

设 i_p 是由 $xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\to(-1)^e xs_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_q}$所定义的$E^n_p(H)$到 $E^n_{n-p}(H)$ 的同态，其中 $\{i_1,\cdots,i_q\}=\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\cdots,j_p\}$，$e=\sum_{i=1}^{p}j_i-p-n$，$F$ 是$\widetilde{H}$ 上的同态

$$F=\begin{bmatrix} & & i_n \\ 0 & i_{n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ i_1 & & 0 \end{bmatrix},$$

显然 F 是 $\widetilde{H}$ 上的酉算子 且 $F^{-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}F$。

对任何 $p,\{j_1,\cdots,j_p\},\{i_1,\cdots,i_q\}=\{1,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\cdots,j_p\}$ 和任何 $x\in D^*_{j_1\cdots j_p}\cap D_{i_1\cdots i_q}$，经计算可知

$$i_{p-1}\circ d_p(A^*)xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}=d^*_{n-p+1}(A)\circ i_p xs_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}。$$

这样下图是交换的：

$$\begin{array}{ccc}
\cdots\to E^n_p(D_{1\,2\cdots n}\cap D^*_{1\,2\cdots n}) & \xrightarrow{d_p(A^*)} & E^n_{p-1}(D_{1\,2\cdots n}\cap D^*_{1\,2\cdots n})\to\cdots \\
i_p\downarrow & & \downarrow i_{p-1} \\
\cdots\to E^n_{n-p}(D_{1\,2\cdots n}\cap D^*_{1\,2\cdots n}) & \xrightarrow{d^*_{n-p+1}(A)} & E^n_{n-p+1}(D_{1\,2\cdots n}\cup D^*_{1\cdots 2})\to\cdots
\end{array}$$

类似地，对任何 $p,\{j_1,\cdots,j_p\},\{i_1,\cdots,i_{n-p}\}=\{1,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\cdots,j_p\}$ 和 $x\in D_{j_1\cdots j_p}\cap D^*_{i_1\cdots i_{n-p}}$，我们有

$$i_{n-p+1}\circ d^*_{n-p+1}(A^*)xs_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_{n-p}}=d_p(A)\circ i_{n-p}xs_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_{n-p}},$$

且下图交换

$$\begin{array}{ccc}
\cdots\to E^n_{n-p}(D_{1\,2\cdots n}\cap D^*_{1\,2\cdots n}) & \xrightarrow{d^*_{n+1-p}(A)^*} & E^n_{n-p+1}\to\cdots \\
i_{n-p}\downarrow & & \downarrow i_{n-p+1} \\
\cdots\to E^n_p(D_{1\,2\cdots n}\cap D^*_{1\,2\cdots n}) & \xrightarrow{d_p(A)} & E^n_{p-1}(D_{1\,2\cdots n}\cap D^*_{1\,2\cdots n})\,|\to\cdots
\end{array}$$

我们用 $\alpha'(A)$ 表示 $\alpha(A)$ 在 $\bigoplus_p E^n_p(D_{12\cdots n}\cap D^*_{1\,2\cdots n})$ 上的限制，

即 $\alpha'(A)=\alpha(A)\,|\bigoplus_p E^n_p(D_{1\,2\cdots n}\cap D^*_{1\,2\cdots n})$，以 $\overline{\alpha'(A)}$ 和 $\overline{\alpha'(A^*)}$ 分别表示 $\alpha'(A)$ 和 $\alpha'(A^*)$ 的闭包，则有

$$\alpha'(A)\subset\overline{\alpha'(A)}\subset\alpha(A)=\alpha^*(A)=\alpha'(A)^*$$

和 $$\alpha'(A^*)\subset\overline{\alpha'(A^*)}\subset\alpha(A^*)=\alpha^*(A^*)\subset\alpha'(A^*)^*。$$

命题 3.4

(1) 如果 $\xi \in \underset{p}{\oplus} E_p^*(D_{12\cdots n} \cap D_{12\cdots n}^*)$，则

$$Fa'(A^*)\xi = a'(A)F\xi;$$

(2) $F(D\overline{a'}(A^*)) = D(\overline{a'}(A))$。

证 (1) 当 $x \in D_{12\cdots n} \cap D_{12\cdots n}^*$ 时，由

$$i_{p-1} \circ d_p(A^*) x s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_p} = d_{n-p+1}^*(A) \circ i_p x s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_p}$$

和 $i_{n-p+1} \circ d_{n-p+1}^*(A^*) x s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{n-p}} = d_p(A) \circ i_{n-p} x s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_p}$，

经计算可知对任何 $\xi \in \underset{p}{\oplus} E_p^*(D_{12\cdots n} \cap D_{12\cdots n}^*)$，

$$Fa'(A^*)\xi = a'(A)F\xi。$$

(2) 设 $\xi = \xi_n \oplus \cdots \oplus \xi_0 \in D(\overline{a'}(A))$，即存在一列 $\{\xi^m\}_{m=1}^{\infty} \subset \underset{p}{\oplus} E_p^*(D_{12\cdots n} \cap D_{12\cdots n}^*)$，使得当 $m \to \infty$ 时，$\xi^m \to \xi$，且 $\lim a'(A)\xi^m$ 存在。那么当 $m \to \infty$ 时，$F\xi^m \to F\xi$，且 $a'(A)F\xi^m = Fa'(A^*)\xi^m$ 趋向一极限。因此当 $F\xi \in D(\overline{a'}(A))$，$F[D(\overline{a'}(A^*))] \subset D[\overline{a'}(A)]$。

类似地，$F^{-1}[D[\overline{a'}(A)]] \subset D(\overline{a'}(A^*))$。证毕。

我们分别以 $V(A)$ 和 $V(A^*)$ 表示 $a(A)$ 和 $a(A^*)$ 的 Cayley 变换，即

$$V(A) = (i - a(A))(-i - a(A))^{-1},$$
$$V(A^*) = (i - a(A^*))(-i - a(A^*))^{-1}。$$

因为 $a(A)$ 和 $a(A^*)$ 是自共轭的，所以 $V(A)$ 和 $V(A^*)$ 是 $\widetilde{H}$ 上的酉算子。

命题 3.5 $FV(A^*) = V(A)F$。

证 设 $H_0 = (-i - a(A^*))\sum \underset{p}{\oplus} E_p^*(D_{12\cdots n} \cap D_{12\cdots n}^*)$。因为 $\oplus E_p^*(D_{12\cdots n} \cap D_{12\cdots n}^*)$ 在 $\widetilde{H}$ 中稠密和 $(-i - a(A^*))^{-1}$ 是有界的，所以 H_0 也在 $\widetilde{H}$ 中稠密。如果 $\xi \in H_0$，$\zeta = (-i - a(A^*))\xi$，则由命题

3.4, $FV(A^*)\xi = F(i-\alpha(A^*))\zeta = F(i-\alpha'(A^*))\zeta$

$$= (i-\alpha'(A))F\zeta = (i-\alpha(A))F\zeta。$$

因为 $F\xi = F(-i-\alpha(A^*))\zeta = (-i-\alpha(A))F\zeta,$

$F\zeta = (-i-\alpha(A))^{-1}F\xi,$

所以对 $\xi\in H_0, FV(A^*)\xi = V(A)F\xi$。因为 H_0 是 $\widetilde{H}$ 的稠密子集，这一等式对所有 $\xi\in\widetilde{H}$ 都成立，且下图成交换：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H} & \xrightarrow{V(A^*)} & \widetilde{H} \\ F\downarrow & & \downarrow F \\ \widetilde{H} & \xrightarrow{V(A)} & \widetilde{H} \end{array}$$

证毕。

命题3.6 (1) $F(D(\alpha(A^*))) = D(\alpha(A))$；

(2) 对 $\xi\in D(\alpha(A^*))$，有 $F\alpha(A^*)\xi = \alpha(A)F\xi$。

证 (1) 令 $N_+(A^*) = [\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A^*))]^\perp,$

$$N_+(A) = [\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A^*)]^\perp,$$

对任何 $\xi\in D(\overline{\alpha'}(A^*))$，存在一列 $\{\xi^m\}_{m=1}^\infty \subset \oplus E_\sharp(D_{12\cdots n}\cap D^*_{12\cdots n})$，满足 $\xi^m\to\xi$ 和 $\alpha'(A^*)\xi^m\to\overline{\alpha'}(A^*)\xi(m\to\infty)$。这样，

$\overline{F\alpha}(A^*)\xi = \lim F\alpha'(A^*)\xi^m = \lim\alpha'(A)F\xi^m = \overline{\alpha}(A)F\xi$。

另一方面，$\widetilde{H} = \overline{\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A^*))} \oplus [\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A^*))]^\perp$

$$= \overline{\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A))} \oplus [\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A))]^\perp。$$

对 $\xi\in\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A^*))^\perp$ 和所有的 $\eta\in D(-i-\overline{\alpha'}(A))$，我们有

$$\langle F\xi, (-i-\overline{\alpha'}(A))\eta\rangle = \langle\xi, F^{-1}(-i-\overline{\alpha'}(A))\eta\rangle$$

$$= \langle\xi, (-i-\overline{\alpha'}(A^*)F^{-1}\eta\rangle = 0。$$

于是 $F[\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A^*))]^\perp \subset [\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A))]^\perp,$

类似地，$F^{-1}(\mathrm{Im}[-i-\overline{\alpha'}(A))]^{\perp}\subset[\mathrm{Im}(-i-\overline{\alpha'}(A^*))]^{\perp}$，

因此我们有 $$FN_+(A^*)=N_+(A)。$$

根据自共轭延拓的 Von-Neumann 第二公式（参见［120］定理 8.12）和命题 3.5

$$\begin{aligned}FD(\alpha(A^*))&=FD(\overline{\alpha'}(A^*))+\{F\xi-FV(A^*)\xi;\xi\in N_+(A^*)\}\\&=D(\overline{\alpha'}(A))+\{F\xi-V(A)F\xi;\xi\in N_+(A^*)\}\\&=D(\overline{\alpha'}(A))+\{\eta-V(A)\eta;\eta\in N_+(A)\}\\&=D(\alpha(A))。\end{aligned}$$

(2) 设 $\overline{\xi}=\xi_0+\xi-V(A^*)\xi\in D(\alpha(A^*))$，其中

$\xi_0\in D(\overline{\alpha'}(A^*)),\xi\in N_+(A^*)$，则

$$\begin{aligned}F\alpha(A^*)\overline{\xi}&=F\alpha(A^*)\xi_0+F(i(I+V(A^*))(I-V(a^*))^{-1}\\&\quad\cdot(I-V(A^*)))F\xi\\&=F\overline{\alpha'}(A^*)\xi_0+F(i(I+V(A^*))\xi\\&=\overline{\alpha'}(A)F\xi_0+i(I+V(A))F\xi\\&=\alpha(A)F\xi_0+i((i+V(A))(I-V(A))^{-1}\\&\quad\cdot(F\xi-V(A)F\xi))\\&=\alpha(A)F\xi_0+\alpha(A)(F\xi-V(A)F\xi)\\&=\alpha(A)(F\xi_0+F\xi-V(A)F\xi)\\&=\alpha(A)F(\xi_0+\xi-V(A^*)\xi)\\&=\alpha(A)F\overline{\xi}。\end{aligned}$$

这样，下图成为交换图：

$$\begin{array}{ccc}D(\alpha(T^*)) & \xrightarrow{F} & D(\alpha(A))\alpha\\ \alpha(A^*)\downarrow & & \alpha(A)\downarrow\\ \widetilde{H} & \xrightarrow{F} & \widetilde{H}\end{array}$$

证毕。

定理3.7 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是正则的充分且必要条件是$A^*=(A_1^*,\cdots,A_n^*)$是正则。

证 直接从命题3.6和定理3.3得出。

定理3.8 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是正则的充分且必要条件是对每个p，$d_p^*\overline{d_p}+\overline{d_{p+1}}d_{p+1}^*$ 在 $E_p^n(H)$有有界逆算子。

证 注意$\alpha^2(A)=\bigoplus\limits_p(d_p^*\overline{d_p}+\overline{d_{p+1}}d_{p+1}^*)$是自共轭的，因此 A 正则$\Longleftrightarrow\alpha(A)^{-1}\in L(\widetilde{H})\Longleftrightarrow\mathrm{Im}\alpha(A)=\widetilde{H}\Longleftrightarrow\mathrm{Im}\alpha^2(A)=\widetilde{H}\Longleftrightarrow\alpha^2(A)^{-1}\in L(\widetilde{H})\Longleftrightarrow$每个 p，$(d_p^*\overline{d_p}+\overline{d_{p+1}}d_{p+1}^*)^{-1}\in L(E_p^n(H))$。证毕。

定理3.9 $S_p(A)$是 C^n 中的闭集。

证 设 $z_0\in\rho(A)$，由$d_p(A-z)=d_p(A)-d_p(z)$和$d_{p+1}^*(A-z)=d_{p+1}^*(A)-d_{p+1}^*(z)$可知 $D(\overline{d_p}(A-z))=D(\overline{d_p}(A))$和$D(d_{p+1}^*(A-z))=D(d_{p+1}^*(A))$。因此$D(\alpha(A-z))=D(\alpha(A))$，且$\alpha(A-z)=\alpha(A-z_0)+\alpha(z_0-z)$。由于$[\alpha(A-z_0)]^{-1}$有界且 $\|\alpha(z_0-z)\|=|z_0-z|$，必有 $r>0$，使得当$|z-z_0|<r$ 时，$\|\alpha(z_0-z)\alpha(A-z_0)^{-1}\|<1$。这时 $\alpha(A-z)$有有界逆，由定理 3.3 $A-z$ 正则。因此$\rho(A)$为开集，即 $S_p(A)$为闭集。

§4 无界正常算子组的联合谱

在本节中，我们将研究正常算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$。利用正常算子的谱定理，可以证明

引理4.1 假设 A_1,A_2 为正常算子，$A_1=\int\lambda dE_1(\lambda)$，$A_2=\int\lambda dE_2(\lambda)$，则$A_1,A_2$ 在一稠密子空间D上可交换（即存在稠密子空间$D\subset D(A_1A_2)\cap D(A_2A_1)$，使得 $x\in D$时有$A_1A_2x=A_2A_1x$）的充

分必要条件是对任何$\lambda_1,\lambda_2,E_1(\lambda_1)$和$E_2(\lambda_2)$可交换。

由此引理直接可得

命题 4.2 正常算子组$A=(A_1,\cdots,A_n)$满足条件*（§2）的充分必要条件是它们的谱测度两两可交换。

证 从引理4.1直接可得，只需注意到$D_{12\cdots n}\cap D^*_{12\cdots n}\supset M$即可。这里$M=\{E_1(I_1)\cdots E_n(I_n)x;x\in H,I_i$为有界矩形$\}$。证毕。

定义 4.3 如果算子A的闭包$\overline{A}$为自共轭的，称A为本性自共轭的。

定义 4.4 若S为Hilbert空间H上的对称算子，记$C^\infty(S)=\bigcap_{n=0}^{\infty}D(S^n)$。对$C^\infty(S)$中向量$f$，若$\exists$数$t(f)>0$，使$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|t|^n}{n!}\|S^nf\|<\infty$对$|t|<t(f)$成立，则称$f$为$S$的解析向量。

引理 4.5 (Nelson) 设T为Hilbert空间H上的对称算子，如果T的解析向量集合是稠密的，则T是本性自共轭的。

证参见[120]

引理4.6 $A_1,\cdots,A_n$是n个谱测度可交换的正常算子，则$S=A_1A_1^*+\cdots+A_nA_n^*$是本性自共轭的。

证 令$M=\{E_1(I_1)\cdots E_n(I_n)x;E_i$为$A_i$的谱测度，$I_i$为有界矩形，$x\in H\}$。因为$M\subset\bigcap_{i=1}^{n}D(A_iA_i^*)=D(S)$，所以$S$稠定。$S^*\supset(A_1A_1^*)^*+\cdots+(A_nA_n^*)^*\supset A_1A_1^*+\cdots+A_nA_n^*=S$，因此$S$为对称的。设$f=E_1(I_1)\cdots E_n(I_n)x\in M$，因为$Sf=E_1(I_1)\cdots E_n(I_n)Sf$，所以$f\in C^\infty(S)$。若记$N=\max_i\|A_i^*A_iE_i(I_i)\|$，则$\|S^mf\|\leqslant(nN)^m\|f\|$，级数$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|t|^m\|S^mf\|}{m!}<\infty$对一切$t$成立。$M$中元都是$S$的解析向量。由引理4.5，$S$为本性自共轭的。证毕。

定理 4.7 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$为谱测度可交换的正常算子

组，A 奇异的充分必要条件是存在一列 $x_m \in E$ 满足：$\|x_m\|=1$ 且 $A_i x_m \to 0 (m\to\infty, i=1,\cdots,n)$。

证 设集合 M 和引理 4.6中相同，$L=L(M)$为 M 的线性张。因为当 $x\in L$ 时有 $A_i A_j^* x = A_j^* A_i x$，所以，由计算知：$(d_p^* \overline{d_p} + \overline{d_{p+1}} d_{p+1}^*)|E_p^n(L) = \oplus S|_L$。$L$中元为对称算子$S|_L$的解析向量，由引理4.5，$S\oplus|_L$ 因而$(d_p^*\overline{d_p}+\overline{d_{p+1}}d_{p+1}^*)|E_p^n(L)$ 为本性自共轭的。但 $(\overline{d_p^*\overline{d_p}+\overline{d_{p+1}}d_{p+1}^*})$是自共轭的，且

$$(\overline{d_p^*\overline{d_p}+\overline{d_{p+1}}d_{p+1}^*}) \supset (\overline{d_p^*d_p + \overline{d_{p+1}}d_{p+1}^*})|_{E_p^n(L)},$$

因此 $(\overline{d_p^*d_p+\overline{d_{p+1}}d_{p+1}^*}) = \overline{(d_p^*d_p+d_{p+1}d_{p+1}^*)|_{E_p^n(L)}} = \overline{\oplus S|_L}$。

但$\oplus S|_L \subset \oplus S$，而由引理 4.6，$\overline{\oplus S}$ 又为自共轭的，因此

$\overline{d_p^*d_p+\overline{d_{p+1}}d_{p+1}^*} = \overline{\oplus S} = \overline{\oplus(A_1A_1^*+\cdots+A_nA_n^*)}$。

当 A 奇异时，由定理 3.3存在一列 $x_m\in H$：$\|x_m\|=1$，$(A_1A_1^*+\cdots+A_nA_n^*)\ x_m\to 0\ (m\to\infty)$。这时，$\|A_1x_m\|^2+\cdots+\|A_nx_m\|^2 = \langle(A_1A_1^*+\cdots+A_nA_n^*)x_m, x_m\rangle \leqslant \|(A_1A_1^*+\cdots+A_nA_n^*)x_m\|\to 0$，因而对一切 k，$A_kx_m\to 0$。

反过来，若存在一列 $x_m \in \bigcap_{i=1}^n D(A_i)$，$\|x_m\|=1$，$A_kx_m\to 0$，$(m\to\infty, k=1,\cdots,n)$，则令 $\xi_1^m = \sum_{j=1}^n x_m s_j$，显然 $\xi_1^m \in D(\overline{d_1})\bigcap D(d_2^*)$。记$\xi_m = 0\oplus\cdots\oplus\xi_1^m \in D(\alpha(A))$，我们有$\|\xi_m\|=\sqrt{n}$，$\alpha(A)\xi_m\to 0$，所以$\alpha(A)$不可逆。由定理3.3，$A$ 奇异。证毕。

定理4.7表明：对无界正常算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 来说，它的联合谱就是联合近似点谱 $\sigma_\pi(A)$。

定理4.8 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为谱测度可交换的正常算子组，E_i 为 A_i 的谱测度，$E=\prod_{i=1}^n E_i$，则

$$S_p(A)=\mathrm{supp}E。$$

证　由定理4.7知，$S_p(A)=\sigma_\pi(A)$，由谱测度的知识立即可知$\sigma_\pi(A)=\mathrm{Supp}E$。证毕。

关于无界算子组的联合谱，Eschmeier在[73]中曾在$\rho(T_i)\neq\phi$的情形下给出过一个定义。

定义4.9　设$T=(T_1,\cdots,T_n)$是无界闭算子组。设$\xi_i\in\rho(T_i)$。记$A=((\xi_1-T_1)^{-1},\cdots,(\xi_n-T_n)^{-1})$。则$T$的豫解集为

$$\rho_e(T)=\left\{\xi-\frac{1}{\lambda};\ \lambda\in\rho(A)\right\}=\left\{\lambda\in\hat{C}^n;\ \frac{1}{\xi-\lambda}\in\rho(A)\right\},$$

其余集

$Sp_e(T)=\hat{C}^n\backslash\rho_e(T)$ 即为T的联合谱。

Eschmier的这一定义也可用Koszul复形来定义，但未用边界算子的闭包，和本章的定义不同。二者间的关系是没有解决的问题。

第九章 无界算子代数与联合谱

Banach 代数与 C^* 代数理论是研究有界线性算子的有力工具，也是联合谱理论中不可缺少的基础。这在研究正常算子组和一类非正常算子组的过程中，曾有不少体现。本章将讨论交换的无界正常算子组，这在多参数系统理论中可看到它确实具有实际背景，然而这时的 C^* 代数理论不能直接应用了。幸好我们找到了处理无界算子的适用工具——GB^* 代数和 EC^* 代数，这是两类无界算子代数（[36]、[88]）。

§1 GB^*代数与EC^*代数

设$\mathscr{A}$是具有单位元 e 的 Hausdorff 局部凸代数(复数域C上)。元素 $x\in\mathscr{A}$称为是有界的如果存在一个非零复数 λ，使得$\{(\lambda x)^n: n=1,2,\cdots\}$是 $\mathscr{A}$ 中有界集。我们记 $\mathscr{A}$ 中所有有界元素全体为 $\mathscr{A}_0$。对每个 $x\in\mathscr{A}$，λ 称属于 x 的豫解集 $\rho(x)$，如果 $\lambda e-x$ 存在逆元素属于 $\mathscr{A}_0$，x 的谱 $\sigma(x)$就定义为，$C\backslash\rho(x)$，当 $x\overline{\in}\mathscr{A}_0$时，还规定$\infty\in\sigma(x)$。

$\mathscr{A}$ 可进一步称为局部凸*代数，如果 $\mathscr{A}$ 还定义了一个对合 $x\to x^*$，满足$(x^*)^*=x$；$(xy)^*=y^*x^*$；$(\alpha x+\beta y)^*=\overline{\alpha}x^*+\overline{\beta}y^*$，易知此时 $x\in\mathscr{A}_0$，当且仅当 $x^*\in\mathscr{A}_0$，因此可得

$$\sigma(x^*)=\{\overline{\lambda};\lambda\in\sigma(x)\}\ (\text{规定}\overline{\infty}=\infty)。$$

还定义 $x\in\mathscr{A}$ 为正常元素，若 $x^*x=xx^*$。$x\in\mathscr{A}$ 称为哈密尔顿元素，若 $x=x^*$。

设 $\mathscr{A}$ 是一个局部凸*代数，记$\mathscr{B}^*$为满足下面要求的 $\mathscr{A}$ 的

子集 B 全体：

(1) B 是绝对凸的，$B^2\subset B, e\in B$；

(2) B 在 $\mathscr{A}$ 中是有界闭的；

(3) $B=B^*$，

定义1.1 一个准完备 [36] 的局部凸*代数 $\mathscr{A}$，带有单位元，称为一个 GB^* 代数，若它满足

(1) $\mathscr{A}$ 是对称的（即任意 $x\in\mathscr{A}$，$e+x^*x$ 有有界逆）；

(2) B^* 中有最大元。（记这最大元为 B_0）。

下面给出 GB^* 代数的一些基本的或后面要用的性质，它们的证明读者可参阅 Allan[36]。

定理1.2 设 $\mathscr{A}$ 是一个 GB^* 代数，记 $\mathscr{A}(B_0)=\{\lambda x;\ \lambda\in C, x\in B_0\}$，则 B_0 导出的 Minkowski 泛函使得 $\mathscr{A}(B_0)$ 成为一个具有单位元的 B^* 代数，（指具有对合的 Banach 代数）并且对任意 $x\in\mathscr{A}$，有 $(e+x^*x)^{-1}\in\mathscr{A}(B_0)$。

推论1.3 若 $\mathscr{A}$ 同时是 GB^* 代数和 Banach 代数，则 $\mathscr{A}$ 必是一个 B^* 代数。反之，任何 B^* 代数是一个 GB^* 代数。

当 $\mathscr{A}$ 是一个交换的 GB^* 代数时，可以验证，此时有 $\mathscr{A}_0=\mathscr{A}(B_0)$。我们记 M_0 是 $\mathscr{A}_0$ 上的非零可乘线性泛函全体，在弱 * 拓扑下 $\sigma(M_0,\mathscr{A}_0)$ 它成为所谓的承载空间。

定理1.4 设 $\mathscr{A}$ 是一个交换的 GB^* 代数，并且带有单位元，则对任意 $\varphi\in M_0$，存在唯一的一个 $\mathscr{A}$ 上的复值函数 φ'，使得

(1) φ' 是 φ 的一个扩张。

(2) φ' 是下面意义下的“部分同态”：

(a) $\varphi'(\lambda x)=\lambda\varphi'(x)$ $(\lambda\in C, x\in\mathscr{A})$ （规定 $0\cdot\infty=0$）；

(b) $\varphi'(x_1+x_2)=\varphi'(x_1)+\varphi'(x_2)$ $(x_1,x_2\in\mathscr{A}, \varphi'(x_1), \varphi'(x_2)$ 不同时取为 ∞)；

(c) $\varphi'(x_1x_2)=\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)$ $(x_1,x_2\in\mathscr{A}, \varphi'(x_1), \varphi'(x_2)$ 不出现 $0\cdot\infty$ 或 $\infty\cdot 0$ 情形)；

(d) $\varphi'(x^*)=\overline{\varphi'(x)}$ (规定$\overline{\infty}=\infty$)。

我们注意到这种φ'实际上是将$\mathscr{A}_0$上通常的可乘线性泛函φ扩张到了整个$\mathscr{A}$上，这个定理的证明思想与第八章中介绍的Eshmeier作法有类似之处，首先对哈密尔顿元h利用豫解集非空和φ的可乘性将φ延拓到h上，然后再根据$\mathscr{A}$中每个元有笛卡尔表示$x=h+ik$，再将φ延拓到整个$\mathscr{A}$上，从而也可看到，上面一些规定也完全出于自然。

当$\mathscr{A}$是交换的GB^*代数时，熟知$\mathscr{A}_0=\mathscr{A}(B_0)$上有Gelfand表示 $x\to\hat{x}=\varphi(x),\varphi\in M_0$。现在我们可以把这个表示延拓到$\mathscr{A}$上去：$x\to\hat{x}=\varphi'(x),x\in\mathscr{A},\varphi\in M_0$。

注意到$x\in\mathscr{A}_0$时，$\hat{x}$是M_0上的连续函数，而$x\in\mathscr{A}$时，只能说$\hat{x}$是M_0上的$\hat{C}$值函数，但我们有

定理1.5 设$\mathscr{A}$是一个交换的GB^*代数并带有单位元，则泛函表示$x\to\hat{x}$是$\mathscr{A}$到M_0上$\hat{C}$值连续函数的一个子$*$代数$\hat{\mathscr{A}}$上的$*$同构，而且$\hat{\mathscr{A}}$包含了所有M_0上的C值连续函数全体。

推论1.6 设$\mathscr{A}$如上，则对任意$x\in\mathscr{A}$，有

$$\sigma(x)=\{\hat{x}(\varphi');\varphi\in M_0\}。$$

现在我们再简单介绍一下EC^*代数的定义。

定义1.7 设H是Hilbert空间，$\mathscr{D}$是H的一个稠子空间，$L(\mathscr{D})$记为$\mathscr{D}$上所有线性算子，(不必有界)全体，设$\mathscr{U}$是带恒等算子I的$L(\mathscr{D})$的一个子代数。$\mathscr{U}$称为$\mathscr{D}$上一个EC^*代数，如果满足下列条件：

(1) 存在$\mathscr{U}$上的一个对合$T\to T^*$，使得对任何$\xi,\eta\in\mathscr{D}$和$T\in\mathscr{U}$，有$\langle T\xi,\eta\rangle=\langle\xi,T^*\eta\rangle$；

(2) 记$\mathscr{U}_b$是$\mathscr{U}$中的有界线性算子全体，则对任何$T\in\mathscr{U}$，有$(1+T^*T)^{-1}\in\mathscr{U}_b$；

(3) 记$\overline{T}$为T的算子闭包（由(1)不难看到每个$T\in\mathscr{U}$都是

可闭算子），则$\overline{\mathscr{U}}_b=\{\overline{T}, T\in\mathscr{U}_b\}$是一个$C^*$代数。

§2 无界正常算子组

无界正常算子包含了有界正常算子，下面若不特别声明，正常算子组可以是无界的。

定义2.1 正常算子组$A=(A_1,\cdots,A_n)$称为交换的，若A_i的谱测度E_i是可以交换的，即$P_iP_j=P_jP_i$，$P_i\in E_i$，$P_j\in E_j$，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$。

如同在第六章§4中指出的，我们不妨定义

定义2.2 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的正常算子组，则A的联合谱定义为

$S_P(A)=\mathrm{Supp}E$，E为A的乘积谱测度

A的扩充联合谱定义为

$$S_{PE}(A)=\mathrm{Supp}\,\hat{E}$$

其中$\hat{E}$是$\hat{C}^n$上的谱测度，对任意$\hat{C}^n$上的Borel集Δ，

$$\hat{E}(\Delta)=E(\Delta\cap C^n)。$$

显然$S_p(A)=C^n\cap S_{PE}(A)$，　$S_{PE}(A)=\overline{S_p(A)}$（$\hat{C}^n$中的闭包）。我们这里提出的$S_p(A)$和$S_{PE}(A)$，各有特别之处。在多参数理论中$\infty$并没有实际意义，所以$S_p(A)$用起来比较实际，特别在下一章中我们将看到，$S_p(A)$有较好的几何性质；而$S_{PE}(A)$却又在算子理论和算子代数中显得自然。

下面我们讨论由上述A生成的EC^*代数和GB^*代数。

定理2.3 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的正常算子组，E是A的乘积谱测度，$\mathscr{F}$是所有在$\mathrm{Supp}E$上连续的复值函数。记$D=\bigcap_{f\in\mathscr{F}}D(E(f))$，这里$D(E(f))$表示算子$E(f)=\int_{\mathrm{Supp}E}f(z)dE(z)$的定

义域，则 D 在 H 中稠密并且关于每个 $E(f)$，$(f\in\mathscr{F})D$ 是不变子空间。并且 D 是 $A=\{E(f);\ f\in\mathscr{F}\}$ 的公共核。

$\mathscr{U}=\{E(f)_D;\ f\in\mathscr{F}\}$是 D 上的一个闭的交换 EC^* 代数，这里 $E(f)_D$ 表示 $E(f)$ 在 D 上的限制。

证 取一列 C^n 中的紧子集 $\{\Delta m\}$ 单调增趋向于 C^n，易知这时

和 $$D(E(f))=\{x\in H;\int_{\text{Supp}}|f(z)|^2d\|E(z)x\|^2<\infty\}$$

$$E(f)x=\lim_{m\to\infty}\int_{\Delta m\cap\text{Supp}E}f(z)dE(z)x,\quad x\in D(E(f))\ 。$$

此外显然有对任何 $f\in E$，$E(f)$是 H 上的一个正常算子，并且 $E(f)$ 有界当且仅当 f 在 Supp$E$ 上有界。

现对任意 $x\in H$，有 $E(\Delta_n)x\in D$ 和 $x=\lim E(\Delta_n)x$，亦即 D 在 H 中稠密。现取任意 f，$g\in\mathscr{F}$ 和 $x\in D$，我们有 $x\in D\subset D(E(fg))\cap D(E(g))\subset D(E(f)\cdot E(g))$，从而 $E(g)x\in D(E(f))$，因此D 是关于每个 $E(g)$，$g\in\mathscr{F}$ 不变的。记 $T=E(g)_D$，则对任何 $x_0\in D(E(g))$，我们有

$$x_m=E(\Delta_m)x_0\in D,m=1,2,\cdots$$

$$\|x_m-x_0\|+\|Tx_m-E(g)x_0\|$$

$$=\|E(\Delta_m^c)x_0\|+\|E(\Delta_m^c)E(g)x_0\|\to 0\quad(m\to\infty),$$

这就证得了对任意 $g\in\mathscr{F}$，$E(g)=\overline{E(g)_D}$，即D是 $E(g)$的核，

现令$\mathscr{U}=\{E(f)_D;\ f\in\mathscr{F}\}$，显然$\mathscr{U}$是具有单位元 I_D 的 $L(D)$ 中的一个交换子代数。定义$\mathscr{U}$ 中的一个对合为

$$E(f)_D\to(E(f)_D)^*=E(\bar{f})_D,$$

注意到 $f\in\mathscr{F}$ 时有 $\bar{f}\in\mathscr{F}$ 且 $E(\bar{f})=E(f)^*$，显然 $\mathscr{U}$满足定义 1.7 中的条件(1)。另外对$f\in\mathscr{F}$，$(I_D+E(f)_D^*E(f)_D)^{-1}=E\left(\frac{1}{1+|f|^2}\right)_D\in\mathscr{U}_b$。因为当 f 有界时，$\|E(f)\|=\sup\{|f(z)|;\ z\in\text{supp}E\}$，因此不难证明 $\overline{\mathscr{U}}_b=\{E(f);\ f\in\mathscr{F},f$ 在 supp$E$ 上有界$\}$成为一个 C^*

代数。这就证明了$\mathscr{U}$是D上的一个$EC^{\#}$代数。$\mathscr{U}$的闭性是由D的定义可得到的（参见［88］）。证毕。

定理2.4 $\mathscr{A}=\{E(f);f\in\mathscr{F}\}$可以引进下面的度量$\rho$而成为一个可分的有单位元的交换$GB^*$代数，这里

$$\rho(T_1,T_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|E(\Delta_n)(T_1-T_2)\|}{1+\|E(\Delta_n)(T_1-T_2)\|}$$

其中，$T_1,T_2\in\mathscr{A}$，$\{\Delta n\}$是一列单调增趋于C^n的C^n中的紧子集。

证 $\mathscr{A}$是由可列半范数$P_n(T)=\|E(\Delta_n)T\|$，$T\in\mathscr{A}$，所生成的局部凸*代数。从$\mathscr{A}$的函数模型易证$\mathscr{A}$的完备性。显然，对任意$f\in\mathscr{F}$，$I+E(f)^*E(f)$有有界逆$E\left(\frac{1}{1+|f|^2}\right)$，因此$\mathscr{A}$是对称的。设$B_0=\{T\in\mathscr{A};P_n(T)\leqslant1,n=1,2,\cdots\}$，则$B_0\in\mathscr{B}^*$。现证$B_0$是$\mathscr{B}^*$中的最大元。

任取$B\in\mathscr{B}^*$，若$T\in B$，则$T^*\in B$，所以$Q=T^*T\in B$，从而$Q^n\in B$，$n=1,2,\cdots$。如果$T\overline{\in}B$，则存在n_0，使$P_{n_0}(T)>1$，因此$P_{n_0}(Q)=P_{n_0}(T^2)>1$，这样就有$P_{n_0}(T^{2^n})=P_{n_0}(Q)^{2^n}\to\infty$，这与$B$的有界性相矛盾，因此必有$T\in B_0$，即$B\subseteq B_0$。这样一来，据定义1.1我们有$\mathscr{A}$是一个$GB^*$代数，它有单位元，可分和交换都是显然的，证毕。

注：$\mathscr{A}$上还可以引进其它拓扑成为GB^*代数，如Inoue［88］中曾对$EC^{\#}$代数$\mathscr{U}$上定义了弱拓扑，并指出$\overline{\mathscr{U}}$在弱拓扑下成为一个GB^*代数。但Allan［36］证明了，在某种意义下，$\mathscr{A}$上的GB^*拓扑是等价的（不是指拓扑等价）。以后我们将采用定理2.4中的度量拓扑。这至少有两个好处，一是当$\mathscr{A}$是有界情形时，这正是范数拓扑；二是这个拓扑是可数生成的。

下面我们就分别称$\mathscr{U}$和$\mathscr{A}=\overline{\mathscr{U}}$是由$A=(A_1,\cdots,A_n)$生成的$EC^{\#}$代数和$GB^*$代数。

还要注意的是 $\mathscr{A}$ 中运算是所谓"强"意义下的。对于 $T_1, T_2 \in \mathscr{A}$，$\lambda \in \mathbb{C}$，$T \in \mathscr{A}$，

$$T_1 + T_2 = \overline{T_1 + T_2}, \qquad T_1 T_2 = \overline{T_1 T_2},$$

$$\lambda \cdot T = \begin{cases} \lambda T, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

不难验证这种运算下正好有

$$E(f_1 + f_2) = E(f_1) + E(f_2); \quad E(f_1 f_2) = E(f_1) E(f_2)。$$

§3 特征与联合谱

设 $A = (A_1, \cdots, A_n)$ 是交换的无界正常算子组，$\mathscr{A}$ 是由 A 生成的交换的 GB^* 代数，$\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{A}$ 的有界元全体，M_0 是 $\mathscr{A}_0$ 的特征（即非零可乘线性泛函）全体。定理1.4告诉我们，每个特征 $\varphi \in M_0$ 可以延拓成 $\mathscr{A}$ 上的"广义特征" φ'，下面我们就用这种"广义特征"来表示 $\mathscr{A}$ 的扩充联合谱 $S_{PE}(A)$。

引理3.1 设 Δ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个子集（可以是空集），则 $z = (z_1, \cdots, z_n) \in S_{PE}(A)$，其中只有 $z_i = \infty$，$i \in \Delta$，当且仅当

$$\sum_{i \notin \Delta} (A_i - z_i)^* (A_i - z_i) + \sum_{i \in \Delta} (I + A_i^* A_i)^{-1}$$

是奇异的。

证 (1) 首先我们假定 $z \in S_{PE}(A) \cap C^n = \mathrm{Supp} E$，这里 E 是 A 的乘积谱测度。取一列收缩到 z 的子球邻域 $\{O_K\}$，则可取到一列单位向量 $x_k \in E(O_k) H$，$k = 1, 2, \cdots$。显然有 $\{x_k\} \subset D = \bigcap_{f \in \mathscr{A}} E(f)$，并且

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (A_i - z_i)^* (A_i - z_i) x_k \right\|^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \| (A_i - z_i)^* (A_i - z_i) x_k \| \right)^2$$

$$\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\|(A_i-z_i)^*(A_i-z_i)x_k\|^2$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}\int_{O_k}|\lambda_i-z_i|^4 d\|E(\lambda)x_k\|^2$$

$$\to 0\quad (k\to\infty)$$

因此 $\sum_{i=1}^{n}(A_i-z_i)^*(A_i-z_i)$ 是奇异的。

反之，如果 $z\in C^n\backslash \mathrm{Supp}E$，则存在一个常数 $c>0$ 使得对任意 $x\in D$，$\|x\|=1$，有

$$\|\sum_{i=1}^{n}(A_i-z_i)^*(A_i-z_i)x\|$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}\|(A_i-z_i)x\|^2$$

$$=\int\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i-z_i|^2 d\|E(\lambda)x\|^2$$

$$\geqslant c\|x\|。$$

令 $f(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i-z_i|^2=|\lambda-z|^2$，则对任意 $x\in D(f(A))$，我们有 $x_n=E(\Delta_n)x\in D$，$n=1,2,\cdots$，这里 $\{\Delta_n\}$ 还是一列单调增趋于 C^n 的紧子集，因此

$$\|f(A)x\|=\|\lim\int_{\Delta_n}f(\lambda)dE(\lambda)x\|$$

$$=\lim\|E(f)x_n\|$$

$$\geqslant\lim c\|x_n\|=c\|x\|。$$

由于 $f(A)$ 是正常的，这就证明了 $f(A)=\sum_{i=1}^{n}(A_i-z_i)^*(A_i-z_i)$ 是可逆的，

(2) 现在设 $z\in C^n$，E_i 是 A_i 的谱测度。则 $(I+A_i^*A_i)^{-1}$ 的谱测度 F_i 可以从 E_i 中导出：

$$F_i(\delta)=E_i[z_i;(1+|z_i|^2)^{-1}\in\delta],i=1,2,\cdots,n。$$

其中 δ 是 C 中的任何 Borel 子集。

从 $Sp_E(A)$ 的定义不难看出，$z=(z_1,\cdots,z_n)\in Sp_E(A)$，其中 $i\in\Lambda$ 时，$z_i=\infty$，当且仅当 $\widetilde{z}=(\widetilde{z}_1,\cdots,\widetilde{z}_n)\in Sp_E(\widetilde{A})\cap C^n$，其中

$$\widetilde{A}=(\widetilde{A}_1,\cdots,\widetilde{A}_n),\widetilde{A}_i=\begin{cases}A_i, & i\overline{\in}\Lambda\\(I+A_i^*A_i)^{-1}, & i\in\Lambda;\end{cases}$$

$$\widetilde{z}=(\widetilde{z}_1,\cdots,\widetilde{z}_n),\widetilde{z}_i=\begin{cases}z_i, & i\overline{\in}\Lambda\\0, & i\in\Lambda\end{cases}$$

这样全部结果可由（1）立即推出。证毕。

定理3.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，$\mathscr{A}$ 是由 A 生成的 GB^* 代数，$\mathscr{A}_0$ 是由 $\mathscr{A}$ 中有界元全体组成的交换 C^* 代数。M_0 是 $\mathscr{A}_0$ 的特征空间，则对任何 $T=(T_1,\cdots,T_n)\subset\mathscr{A}$，有

$Sp_E(T)=\{(\varphi'(T_1),\cdots,\varphi'(T_n));\varphi\in M_0$，$\varphi'$ 是 φ 的扩张特征$\}$。特别当 T 取为 A 时，我们得到了 $Sp_E(A)$ 的特征表示。

证 显然 T 也是交换的正常算子组。现设 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in Sp_E(T)$，其中 $i\in\Lambda$ 时，$z_i=\infty$。则据引理 3.2 知，$B=\sum\limits_{i\overline{\in}\Lambda}(T_i-z_i)^*(T_i-z_i)+\sum\limits_{i\in\Lambda}(I+T_i^*T_i)^{-2}$ 是奇异的。如果不存在 $\varphi\in M_0$，使得 $z=(z_1,\cdots,z_n)=(\varphi'(T_1),\cdots,\varphi'(T_n))$，则对任何 $\varphi\in M_0$，有

$$\hat{B}(\varphi')=\varphi'(B)=\sum_{i\overline{\in}\Lambda}|\hat{T}_i(\varphi')-z_i|^2+\sum_{i\in\Lambda}(I+|\hat{T}_i(\varphi')|^2)^{-2}>0,$$

所以 $\psi(\varphi)=(\hat{B}(\varphi'))^{-1}$ 是 M_0 上的一个复值连续函数。根据定理 1.5，$\psi(\varphi)$ 是 $\mathscr{A}_0$ 中唯一的算子 J 的 Gelfand 表示的象，因此不难从算子演算知道，J 就是 B 的有界逆，这与 B 的奇异性相矛盾，因此必存在 $\varphi\in M_0$，使得 $z=(z_1,\cdots,z_n)=(\varphi'(T_1),\cdots,\varphi'(T_n))$。

反之，如果 $z=(z_1,\cdots,z_n)\overline{\in}Sp_E(T)$，则由引理 3.2 知上述的算子 B 是可逆的。显然这个唯一的逆算子就是

$$J=\int\Big(\sum_{i\in\Lambda}|f_i-z_i|^2+\sum_{i\in\Lambda}(1+|f_i|^2)^{-2}\Big)^{-1}dE(\lambda)\in\mathscr{A}_0,$$

既然 $JB=I$（强意义运算），并且对任何 $\varphi\in M_0$，φ' 是 $\mathscr{A}$ 上的一个扩张的 * 同态（定理1.5），因此不可能存在 $\varphi\in M_0$，使得 $(z_1,\cdots,z_n)=(\varphi'(T_1),\cdots,\varphi'(T_n))$。证毕。

推论3.3 设 A 如上，$f=(f_1,\cdots,f_m)$ 是从 $Sp_E(A)$ 到 C^m 的函数，使得 $f_i(\lambda)/(1+|\lambda|^2)^{L_i}$ 对某非负整数 L_i 在 $Sp_E(A)$ 上是连续的，$i=1,\cdots,m$。则有

$$f(Sp_E(A))=Sp_E(f(A)),$$

其中 $f(A)=(f_1(A),\cdots,f_m(A))$，$f_i(A)=E(f_i),i=1,\cdots,m$。

证 我们先考虑 f 是在 $Sp_E(A)$ 上连续的，这时对每个 j，$f_j((\hat{A})\varphi')$ 是 M_0 上连续的 $\hat{C}$ 值函数，其中 $\hat{A}(\varphi')=(\hat{A}_1(\varphi'),\cdots,\hat{A}_n(\varphi'))$，$M_0$ 是 $\mathscr{A}_0$ 的特征空间。所以据定理1.5，$f_j(\hat{A})\varphi'$ 是 $\mathscr{A}_0$ 中唯一的元素 $E(f_j)$ 的 Gelfand 象，$j=1,\cdots,m$。再据上面定理，

$$Sp_E(f(A))=\{(f_1(\hat{A})(\varphi'),\cdots,\hat{f}_m(A)(\varphi');\varphi\in M_0\}$$

$$=\{(f_1(\hat{A})(\varphi')),\cdots,f_m(\hat{A}(\varphi'));\varphi\in M_0\}$$

$$=f(Sp_E(A))。$$

现在，设 $g_j=f_j/(1+|\lambda|^2)^{l_j}$ 关于某个非负整数 l_j 在 $Sp_E(A)$ 连续，则有

$$f_j(A)=g_j(A)(I+\sum_{i=1}^{n}A_i^*A_i)^{-l_j},j=1,\cdots,m,$$

注意到 φ' 是一个扩张的 * 同态并利用上面已证结果，我们有

$$Sp_E(f(A))=\{(f_1(\hat{A})(\varphi'),\cdots,f_m(\hat{A})(\varphi');\varphi\in M_0\}$$

$$=\{(g_1(\hat{A}(\varphi'))h(\varphi')^{l_1},\cdots,g_m(\hat{A}(\varphi'))h(\varphi')^{h-l_m});\varphi\in M_0\}$$

$$=\{(f_1(\hat{A}(\varphi')),\cdots,f_m(\hat{A}(\varphi'));\varphi\in M_0\}$$

$$=f(Sp_E(A)),$$

其中 $h(\varphi')=1+\sum_{i=1}^{n}|\hat{A}_i(\varphi')|^2$。证毕

M.Chō[50] 中证明了有界的交换正常算子组，它的 Dash 谱与 Taylor 谱是相同的，这个结果现可以推广到无界情形。

定义3.4 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，$\mathscr{A}$ 是由 A 生成的 GB^* 代数，$\mathscr{A}''$ 是 $\mathscr{A}$ 在 $l(H)$ 中的二次交换子（设 T 是无界算子，B 是有界算子，T 称为 B 交换，若 $TB\supset BT$）扩充的 A 的 Dash 谱 $\sigma_E(A)$ 是这样的一些 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in C^n$，其中 $i\in\Lambda$ 时，$\lambda_i=\infty$，使得不存在 $B=(B_1,\cdots,B_n)\subset\mathscr{A}''$，满足

$$\sum_{i\bar{\in}\Lambda}B_i(A_i-\lambda_i)+\sum_{i\in\Lambda}B_i(I+A_i^*A_i)^{-1}=T,$$

其中运算都是强意义下的。

定理3.6 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，则有 $Sp_E(A)=\sigma_E(A)$。

证　若 $z=(z_1,\cdots,z_n)\bar{\in}Sp_E(A)$，其中 $i\in\Lambda$ 时，$z_i=\infty$。则据引理3.2，$B=\sum_{i\bar{\in}\Lambda}(A_i-z_i)^*(A_i-z_i)+\sum_{i\in\Lambda}(I+A_i^*A_i)^{-2}$ 是可逆的。令 $B_i=B^{-1}(A_i-z_i)^*$，当 $i\bar{\in}\Lambda$；$B_i=B^{-1}(I+A_i^*A_i)^{-1}$，$i\in\Lambda$，则显然有 $B_i\in\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}''$，$i=1,\cdots,n$ 并且强运算下有

$$\sum B_i(A_i-z_i)+\sum B_i(I+A_i^*A_i)^{-1}\in I。$$

反之，如果存在 $B_i\in\mathscr{A}''$，$i=1,2,\cdots,n$，使得上式成立，则 $(A_i-z_i,(I+A_j^*A_j)^{-1},i\bar{\in}\Lambda,j\in\Lambda)$ 必须在 $D=\bigcap_{f\in\mathscr{F}}D(E(f))$ 上联合下方有界，从而推得 B 在 D 上下方有界。因此不难推出正算子 B 是可逆的，据引理3.1，这即 $z=(z_1,\cdots,z_n)\bar{\in}Sp_E(A)$，其中 $i\in\Lambda$ 时，$z_i=\infty$。

§4　无界正常算子组的联合豫解式估计

对于有界的交换正常算子组 A，若 $z\in C^n\backslash Sp(A)$，则我们知

道这时成立（第四章定理4.4）

$$\operatorname{dist}(z, S_p(A)) = \|(\widehat{A-z})^{-1}\|^{-1}$$

这里 $\widehat{A-z}$ 是 $A-z$ 导出的 Curto 矩阵。下面我们将利用无界算子代数的一些技巧，证明对无界的交换正常算子组 A 也有类似的结果。

先介绍 Inoue 证明的一个引理。

引理4.1 设 $\mathscr{U}$ 是一个 EC^* 代数，则我们有 $\overline{T_1}+\overline{T_2}=\overline{T_1+T_2}$，$\overline{T_1}\cdot\overline{T_2}=\overline{T_1T_2}$，$\lambda\cdot\overline{T}=\overline{\lambda T}$，以及 $(\overline{T})^*=(\overline{T^\#})$ 对所有 $T, T_1, T_2\in\mathscr{U}$ 和 $\lambda\in C$。这里 $\overline{T}$ 表示 T 的算子闭包，上述等式左边涉及的运算均是强意义下的。

证　先对 $T=T^\#$ 情况下证明 $\overline{T}^*=\overline{T^\#}$。

若 $T=T^\#$，则 $(1+T^2)^{-1}\in\mathscr{U}$。从而 $T^2(I+T^2)^{-2}=((I+T^2)-I)(I+T^2)^{-2}=(I+T^2)^{-1}-(I+T^2)^{-2}$，因此 $T^2(I+T^2)^{-2}\in\mathscr{U}_b$。

这样对每个 $\xi\in D$，有 $\|T(I+T^2)^{-1}\xi\|^2\leqslant\|\overline{T^2(I+T^2)^{-2}}\|\|\xi\|^2$，因此得到 $T(I+T^2)^{-1}\in\mathscr{U}_b$。另外还有

$(iI-T)(-iI-T)(I+T^2)^{-1}=(iI-T)(-i(I+T^2)^{-1}-T(I+T^2)^{-1})=I$ 和

$(-i(I+T^2)^{-1}-T(I+T^2)^{-1})=I$，

所以 $(iI+T)^{-1}$ 存在而且属于 $\mathscr{U}_b$。现对每个 $\lambda=\alpha+i\beta\in C\backslash R$，我们有 $(\lambda I-T)=\beta\left(iI-\frac{1}{\beta}(T-\alpha\tau)\right)$，因此对所有 $\lambda\in C\backslash R$，我们有

$\overline{(\lambda I-T)^{-1}}=(\lambda I-\overline{T})^{-1}$ 是有界的，即 $\overline{T}$ 的谱是实的。既然 $T^*\supset T^\#=T$，从而 $\overline{T}$ 是哈密尔顿算子，因此 $\overline{T}$ 是自共轭的，这样就证明了 $\overline{T}^*=\overline{T}=\overline{T^*}$。

现证对每个 $T\in\mathscr{U}$，都有 $\overline{T}^*=\overline{T^*}$。设 $H_1=\overline{T}^*\ \overline{T}$ 和 $H_2=$

$((T^{\#})^{*})^{*}(T^{\#})^{*}$，显然$H_1 \supset \overline{T^{\#}T}$和$H_2 \supset \overline{T^{\#}T}$，既然$(T^{\#}T)^{*}=T^{\#}T$，我们知$\overline{T^{\#}T}$是自共轭的，则是极大算子，从而$H_1=H_2=\overline{T^{\#}T}$。因此$D(\overline{T})=D(H_1^{1/2})=D(H_1^{1/2})=D((T^{\#})^{*})$，所以$\overline{T}=(T^{\#})^{*}$，从而$\overline{T^{*}}=\overline{T}^{\#}$。

设$T_1,T_2\in\mathscr{U}$，由强运算定义$\overline{T_1}+\overline{T_2}=\overline{\overline{T_1}+\overline{T_2}}$，因此显然有$\overline{T_1+T_2}\subset\overline{T_1}+\overline{T_2}$。既然$T_i=(T_i^{*})^{*}$，我们有

$$\overline{\overline{T_1}+\overline{T_2}}=\overline{(T_1^{*})^{*}+(T_2^{*})^{*}}\subset(T_1^{*}+T_2^{*})^{*}=((T_1+T_2)^{*})^{*}$$

$=\overline{T_1+T_2}$。类似地我们可以证明$\overline{T_1}\cdot\overline{T_2}=\overline{T_1T_2}$和$\lambda\cdot\overline{T}=\overline{\lambda T}$。证毕。

下面这个引理在一些代数书中可找到[89]。

引理4.2 设$\mathscr{U}$是一个有单位元交换环，$M_n(\mathscr{U})$是从$\mathscr{U}$为元素的n阶矩阵环，$A\in M_n(\mathscr{U})$，则A在$M_n(\mathscr{U})$中可逆的充要条件是$\det A$在$\mathscr{U}$中可逆。

引理4.3 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的正常算子组，$\mathscr{A}$是由A生成的GB^{*}代数，$D=\bigcap_{T\in\mathscr{A}}D(T)$，则对任何$z\in C$，

$$\operatorname{dist}(z,Sp_E(A))=\inf\{(\sum_{i=1}^{n}\|(A_i-z_i)x\|^2)^{\frac{1}{2}};x\in D,\|x\|=1\}。$$

证 设$B=\sum_{i=1}^{n}(A_i-z_i)^{*}(A_i-z_i)$，据推论3.4有

$$Sp_E(B)=\{\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i-z_i|^2;\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in Sp_E(A)\},\qquad(4.1)$$

既然B是正算子，所以有

$$\begin{aligned}&\operatorname{dist}(0,Sp_E(B))\\&=\inf\{\langle Bx,x\rangle;x\in D(B),\|x\|=1\}\\&=\inf\{\sum\|(A_i-z_i)x\|^2;x\in D,\|x\|=1\}。\qquad(4.2)\end{aligned}$$

这是因为对任何$x\in D(B)$和单调增趋于C^n的紧子集$\{\Delta_n\}$，易证

有 $E(\Delta_n)x\in D$ 和 $BE(\Delta_n)x\to Bx$。因此我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}\in(z,Sp_E(A))&=\inf\{|\lambda-z|;\ \lambda\in Sp_E(A)\}\\&=[\operatorname{dist}(0,Sp_E(B))]^{1/2}\\&=\inf\{(\sum_{i=1}^{n}\|(A_i-z_i)x\|^2)^{\frac{1}{2}},x\in D,\|x\|=1\}(\text{由}(4.2))。\end{aligned}$$

证毕。

我们现在可以证明本节的重要定理。

定理4.4 设 $A(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，$\mathscr{A}$ 是由 A 生成的 GB^* 代数，$D=\bigcap\limits_{T\in A}D(T)$，$z\in C^n\cap Sp_E(A)$，则

$$\operatorname{dist}(z,Sp_E(A))=\|(A\tilde{-}z)^{-1}\|^{-1},$$

这里$(A\tilde{-}z)$是 $H\otimes C^{2^{n-1}}$上的算子$(A\hat{-}z)_D$的闭包，而$(A\hat{-}z)_D$是 $A-z$ 形式导出的 Curto 矩阵，其中每个元素都限制在 D 上。

证 据定理2.3，D 对每个 $T\in\mathscr{A}$ 都是核，所以可以象有界情形那样导出 $A-z$ 的Curto 矩阵$(A\hat{-}z)_D$。例如 $n=2$ 时，我们有

$$(A\hat{-}z)_D=\begin{bmatrix}(A_1-z_1)_D & (A_2-z_2)_D\\ -(A_2-z_2)_D & (A_2-z_1)_D^*\end{bmatrix}。$$

显然 $\mathscr{U}=\mathscr{A}|_D$ 是由 A 生成的 EC^* 代数，而 $\mathscr{A}=\overline{\mathscr{U}}$。下面我们要证矩阵环 $M_K(A|_D)=M_K(\mathscr{U})$ 也是一个 EC^* 代数，它是作用在 $H\otimes$ $\mathbf{C}^K$ 的稠子空间 $D\otimes C^K$ 上的，其中 $K=2^{n-1}$。

让我们观察定义1.7。在矩阵的通常的运算和对合意义下，欲证 $M_K(\mathscr{U})$ 是一个 EC^* 代数，我们只须验证（2）与（3）（其它较显然）。

现在要证（2），即任何 $T\in M_K(\mathscr{U})$，有$(I+T^*T)^{-1}$ 存在且有界，并要$(I+T^*T)^{-1}\in M_K(\mathscr{U})$。

我们还是令 $\{\Delta_n\}$ 为 C^n 中一列单调增趋向于 C^n 的紧子集，并且 $F(\Delta_n)$ 为 $H\otimes C^K$ 中对角算子矩阵 $\operatorname{diag}(E(\Delta_n))$。因此若记 $T_{\Delta_n}=F(\Delta_n)TF(\Delta_n)$，则$T_{\Delta_n}$是有界算子，因此对任意 $y\in H\otimes C^K$，

有$\|(I+T^{\#}T)F(\Delta_n)y\|=\|F(\Delta_n)y+T^{*}_{\Delta_n}T_{\Delta_n}y\|$

$$\geqslant\langle F(\Delta_n)y,y\rangle+\langle T^{*}_{\Delta_n}T_{\Delta_n}y,y\rangle\geqslant\|F(\Delta_n)y\|^2。$$

特别取$y\in D(I+T^{\#}T)$，注意到当$n\to\infty$时，$F(\Delta_n)y\to y$，$(I+T^{\#}T)F(\Delta_n)y\to(I+T^{\#}T)y$，因此有$\|(I+T^{\#}T)y\|\geqslant\|y\|^2$。从而，当$y\in D(I+T^{\#}T)$，$\|y\|=1$时，有$\|(I+T^{\#}T)y\|\geqslant 1$，因此$(I+T^{\#}T)^{-1}$存在而且有界。

$\overline{\mathscr{U}}=\mathscr{A}$可看作$S_p(A)$上的连续函数全体，因此行列式$\det(I+T^{\#}T)$还是个连续函数，若它在$S_p(A)$上处处不等于0，则就有逆在$\mathscr{U}$中，因此据引理4.2，$(I+T^{\#}T)^{-1}\in M_k(\mathscr{U})$。这样(2)就证好了。事实上若它有零点，则必包含在某Δ_n中，但在$F(\Delta_n)(H\otimes C^k)$上限制时，$I+T^{\#}T$是有界算子矩阵，而结论对有界情形熟知是对的，它的行列式在$\Delta_n\cap S_P(A)$上没有零点。但这个行列式正是原行列式乘特征函数χ_{Δ_n}，这样我们就证明了(2)。

至于(3)，我们只须证当$M=(M_{ij})\in M_k(\mathscr{U})$有界时，必有$M_{ij}\in\mathscr{U}^b$，但这可以选取特殊的$H\otimes C^k$中向量，推出任意$x\in D$，有$|\langle M_{ij}x,x\rangle|\leqslant\|M\|\|x\|^2$。由于$M_{ij}$是正常算子，因此$\|M_{ij}\|=\omega(M_{ij})\leqslant\|M\|$，$i,j=1,\cdots,k$。因为$\overline{\mathscr{U}_b}$是一个$C^*$代数，因此可知$\overline{M_k(\mathscr{U}^b)}=M_k(\overline{\mathscr{U}^b})$也是$C^*$代数。这样我们就证好了$M_k(\mathscr{U}^b)$确实是一个$EC^*$代数。

现在可回到定理的证明。由引理4.1知，$(A-\widehat{z})_D$是可闭的，并且$((A-\widehat{z})_D)^*=\overline{(A-\widehat{z})^*_D}$。记$(A-\widehat{z})_D$的闭包算子为，$A-\widetilde{z}$，这样，

$$(A-\widehat{z})^*_D(A-\widehat{z})_D=(A-\widehat{z})_D(A-\widehat{z})^*_D$$

$$=\operatorname{diag}\{\sum_{i=1}^{n}(A_i-z_i)^*_D(A_i-z_i)_D\},$$

从而有

$$(A-\widetilde{z})^*(A-\widetilde{z})=\overline{[(A-\widehat{z})_D]^*(A-\widehat{z})_D}$$

$$=\overline{(\widehat{A-z})_D^*}\ \overline{(\widehat{A-z})_D}$$

$$=\mathrm{diag}\{\overline{\sum(A_i-z_i)_D^*(A_i-z_i)_D}\}$$

$$=\mathrm{diag}\{\sum\overline{(A_i-z_i)_D^*}\ \overline{(A_i-z_i)_D}\}$$

$$=\mathrm{diag}\ (\sum_{i=1}^n(A_i-z_i)^*(A_i-z_i)\text{。}$$

根据引理3.2,易知$z\overline{\in}S_{P_E}(A)$时，$\widetilde{A-z}$在$H\otimes C^k$上可逆，而且还有

$$\|(\widetilde{A-z})^{-1}\|^2=\|(\widetilde{A-z})^{-1}[(\widetilde{A-z})^{-1}]^*\|$$

$$=\|[(A-\widetilde{z})^*(A-\widetilde{z})]^{-1}\|$$

$$=\|(\sum_{i=1}^n(A_i-z_i)^*(A_i-z_i))^{-1}\|$$

$$=(\inf_{\|x\|=1,x\in D}\langle\sum(A_i-z_i)^*(A_i-z_i)x,x\rangle)^{-1}$$

$$=\mathrm{dist}(z,S_{P_E}(A)))^{-2}\qquad\text{(引理 4.3)证毕。}$$

推论4.5 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的正常算子组，$\widetilde{A}$如定理4.4,，则$\widetilde{A}$是$H\otimes C^{2^{n-1}}$上的正常算子，而且A奇异的充要条件是$\widetilde{A}$奇异。

这从上述定理证明中不难得到。

第十章　联合数值域、联合范数及联合谱半径

第三章中，我们已初步介绍了联合数值域，联合范数以及联合谱半径的概念，并讨论了有界的交换的正常算子组的联合数值域的一些性质。本章要继续讨论几类算子组的联合数值域等性质，最后对无界交换正常算子组的联合数值域进行比较系统的研究。

联合数值域理论与联合谱研究有密切的关系，随着 Taylor 谱理论的发展，联合数值域理论也有许多新的进展，但是仍有不少问题甚至是基本问题有待解决。

§1　重交换算子组的联合数值域

对于单个算子 A，熟知有 $S_p(A)\subset\overline{W(A)}$，[49]，但是对于交换的算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是否还有 $S_p(A)\subset\overline{W(A)}$，仍是一个没有解决的问题。然后我们可以证明

定理1.1　若 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 Hilbert 空间 H 上重交换的算子组，则 $S_p(A)\subset\overline{W(A)}$，而且当 $z=(z_1,\cdots,z_n)\overline{\in}\overline{W(A)}$ 时，还有 $\|(\widehat{A-z})^{-1}\|\leqslant \operatorname{dist}(z,\overline{W(A)})^{-1}$，

这里 $\widehat{A-z}$ 是由 $A-z$ 导出的 $H\otimes C^{2^{n-1}}$ 上的 Curto 算子矩阵。

证　设 $z=(z_1,\cdots,z_n)\overline{\in}\overline{W(A)}$，由 A 的重交换性可知这时 $(\widehat{A-z})^*(\widehat{A-z})$ 与 $(\widehat{A-z})(\widehat{A-Z^*})$ 都是 $H\otimes C^{2^{n-1}}$ 上对角算子矩阵，它们的对角元都是形如 $\sum(A_i-z_i)^{f(i)}(A_i^*-\overline{z_i})^{f(i)}$ 的元素，

其中$f:\{1,\cdots,n_j\}\to\{1,*\}$映射。

注意到$\delta=\text{dist}(z,\overline{W(A)})>0$，这时对任意$x\in H$，$\|x\|=1$，有

$$\delta^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|z_i-\langle A_ix,x\rangle|^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle(z_i-A_i)x,x\rangle|^2$$

$$=\sum_{f(i)=*}^{n}|\langle(z_i-A_i)x,x\rangle|^2+\sum_{f(i)=1}|\langle(z_i-A_i)^*x,x\rangle|^2$$

$$\leqslant\sum_{f(i)=0}\|(z_i-A_i)x\|^2+\sum_{f(i)=1}\|(z_i-A_i)^*x\|^2,$$

对任何单位向量$x=\oplus x_f,x_f\in H\otimes C^m,(m=2^{n-1})$

$$\|(\widehat{A-z})x\|^2=\langle(\widehat{A-z})^*(\widehat{A-z})x,x\rangle$$

$$=\sum_f\langle\sum_{i=1}^{n}(A_i-z_i)^{f(i)}(A_i^*-\overline{z_i})^{f(i)}x_f,x_f\rangle$$

$$=\sum_f\Big(\sum_{f(i)=*}\|(A_i-z_i)x_f\|^2+\sum_{f(i)=1}\|(A_i-z_i)^*x_f\|^2$$

$$\geqslant\delta^2\sum_f\|x_f\|^2$$

$$=\delta^2\|x\|^2。\tag{1.2}$$

这样，我们就证得$H\otimes C^{2^{n-1}}$上$\widehat{A-z}$是下方有界的。同样方法可证$(\widehat{A-z})^*$也是下方有界的，从而$\widehat{A-z}$是可逆的。据第二章定理，我们知道$\widehat{A-z}$是Taylor意义下正则的，即$z\overline{\in}S_p(A)$。

此外由（1.2)式知，

$\|(\widehat{A-z})^{-1}\|\leqslant\delta^{-1}=\text{dist}\,(z,\overline{W(A)})^{-1}$。证毕。

对于重交换的亚正常算子组，我们还有更好的结果。

定理1.2 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$为重交换的亚正常算子组，则有$\|T\|=\omega(T)=r_{sp}(T)$，即$T$是联合达范的。

证 易知$r_{sp}(T)\leqslant\omega(T)\leqslant\|T\|$，故只须证$\|T\|\leqslant r_{sp}(T)$。

$$\text{因为}\|T\|^2=\sup\{\sum_{i=1}^{n}\|T_ix\|^2;\ \|x\|=1\}$$

$$=\sup\{\sum_{i=1}^{n}\langle T_i^*T_i\ x,x\rangle,\|x\|=1\}。$$

而 $T^*T=(T_1^*T_1,\cdots,T_n^*T_n)$ 是交换的正常算子组，据第三章定理3.5，有 $\mathrm{conv}S_P(T^*T)=\overline{W(T^*T)}$，因此存在，$r=(r_1,\cdots,r_n)\in S_P(T^*T)$，使得 $|r|=\|T\|^2$。又因T是重交换的，据第四章定理，我们有 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in S_P(T)$，使得 $|z_k|=r_k, k=1,\cdots,n$。因此有 $|z|=(\sum_{k=1}^n |z_k|^2)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{k=1}^n r_k)^{\frac{1}{2}}\geqslant(\sum_{k=1}^n r_k^2)^{\frac{1}{4}}=|r|^{\frac{1}{2}}=\|T\|$，这就是说 $r_{s_p}(T)\geqslant\|T\|$，从而必有 $r_{s_p}(T)=\omega(T)=\|T\|$。

§2　一类半亚正常算子组的联合达范性

对于单个半亚正常算子T，夏道行［19］中已证明T是达范的。上一节中我们也已证明了重交换的亚正常算子组，也有联合达范性。这一节中，我们要证明重交换的半亚正常算子组，联合达范性还是成立的。

定理2.1　设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是重交换的半亚正常算子组，则有 $\|A\|=r_{s_p}(A)$，即 A 是联合达范的。

证　设 $A_i=U_i|A_i|$ 是 A_i 的极分解，U_i 是酉算子，$i=1,\cdots,n$。$|A_i|_+$ 为 $|A_i|$ 的符号算子，$|A|_+=(|A_1|_+,\cdots,|A_n|_+)$ 是交换的正常算子组。由于 $|A_i|\leqslant|A_i|_+, i=1,\cdots,n$，因此不难知道 $\omega(|A|)\leqslant\omega(|A|_+)$。下面我们先证明 $\omega(|A|_+)=\|A\|$。

首先，

$$\|A\|^2=\sup_{\|x\|=1}(\sum_{i=1}^n\|A_ix\|^2)=\sup_{\|x\|=1}(\sum_{i=1}^n\||A_i|x\|^2$$

$$=\||A|\|^2,$$

据第三章定理3.3有

$$\|A\|=\||A|\|^2=\omega(|A|)\leqslant\omega(|A|_+)。$$

反之我们有

$$\omega(|A|_+)$$

$$=\sup_{\|x\|=1}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle |A_i|_+x,x\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\sup_{\|x\|=1}\left(\sum_{i=1}^{n}\||A_i|_+x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sup_{\|x\|=1}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle |A_i|_+^2x,x\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{n}|A_i|^2\right\|^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{n}A_i^*A_i\right\|^{\frac{1}{2}}$$

$$=\omega\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^*A_i\right)^{1/2}$$

$$=\|A\|。$$

这就证明了 $\omega(|A|_+)=\|A\|$。

由于 $|A|_+$ 是交换的正常算子组，$\omega(|A|_+)=r_{S_p}(|A|_+)$。因此必有 $r=(r_1,\cdots,r_n)\in S_P(|A|_+)$，使得 $|r|=\|A\|$。注意到 $A_+=(U_1|A_1|_+,\cdots,U_n|A_n|_+)$ 是交换的正常算子组，由连续谱映照定理（第三章定理1.3），知存在 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in S_P(A_+)$ 使得 $|z_i|=\gamma_i,i=1,\cdots,n$。这样我们有

$$z\in S_P(A_+)=\sigma_\pi(A_+)\subset\sigma_\pi(A)\subset S_P(A)。$$

这就得到了 $\nu_{SP}(A)=\|A\|$。证毕。

推论2.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为重交换的半亚正常算子组，并且每个 A_i 都是可逆的，记 $A^{-1}=(A_1^{-1},\cdots,A_n^{-1})$，则

$$\|A^{-1}\|=r_{S_P}(A^{-1})=\sup\{(\sum_{i=1}^{n}1/|\lambda_i|^2)^{\frac{1}{2}};\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A)\}。$$

证 据夏道行［19］知 A_i^{-1} 也是半亚正常算子，$i=1,\cdots,n$。由于 $0\overline{\in}S_p(A_i)$，则 A_i 有唯一极分解 $A_i=U_i|A_i|$，其中 U_i 为酉算子，$|A_i|$ 可逆，$i=1,\cdots,n$。由 A 的重交换性可知 A^{-1} 是重交换的，据上述定理知 $\|A^{-1}\|=r_{S_p}(A^{-1})$。最后一个等式是根据 A 与 A^{-1} 的联合谱的谱映照定理得到的。

§3 联合数值域的边界及 Arveson 的一个命题

本节先讨论 Hilbert 空间上非交换算子组的联合数值域，边界点与约化联合点谱、约化联合近似点谱的联系，然后利用这个结果，推广 Arveson 关于范数与特征的一个命题。

定义3.1 Hilbert 空间 H 上的算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ （不必交换），$z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$ 称为 A 的联合约化特征值，若存在 $x\in H$，$x\neq 0$，使得 $A_ix=z_ix$，$A_i^*x=\overline{z_i}x$，$i=1,\cdots,n$。z 称为 A 的联合约化近似谱点，若存在 H 上的一列单位向量 $\{x_n\}$，使得 $\|(A_i-z_i)x_n\|\to 0$，$\|(A_i^*-\overline{z_i})x_m\|\to 0,(m\to\infty),i=1,\cdots,n$。

引理3.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为 H 上的算子组，$A^0=(A_1^0,\cdots,A_n^0)$ 是 A 在扩张空间 $K\supset H$ 上的 Berberian 扩张，则 $W(A^0)=\overline{W(A)}$。

证　设 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\overline{W(A)}$，则存在一列单位向量 $\{x_m\}$ 使得 $\langle A_ix_m,x_m\rangle\to z_i,i=1,\cdots,n$，因此 (x_m) 是 K 中的一个单位向量 $\langle A_i^0(x_m),(x_m)\rangle=z_i$，$i=1,\cdots,n$。

反之设 $(\langle A_1^0u,u\rangle,\cdots,\langle A_n^0u,u\rangle)\in W(A^0)$，$u$ 是 K 中的单位向量，则对任意 $\varepsilon>0$，存在单位向量 $(x_m)\in K$，其中 $x_m\in H$，$m=1,2,\cdots$，使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\langle A_i^0(x_m),(x_m)\rangle-\langle A_i^0u,u\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon。$$

由于 Banach 极限 $\lim\limits_m\|x_m\|=1$，因此据 Berberian 扩张定义用取子列的方法，可以找到一列单位向量 $\{y_i\}\subset H$，使得 $\langle A_i^0(x_m),(x_m)\rangle=\lim\limits_i\langle A_iy_i,y_i\rangle$，$i=1,\cdots,n$。这就意味着 $(\langle A_1^0(x_m),(x_m)\rangle,\cdots,\langle A_n^0(x_m),(x_m)\rangle)\in\overline{W(A)}$，从而有

$(\langle A_1^0 u,u\rangle,\cdots,\langle A_n^0 u,u\rangle)\in\overline{W(A)}$。证毕。

定理3.3 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 H 上的算子组，则有

(1)若 $z\in B_d[\mathrm{conv}W(A)]$，而且 $z\in\sigma_p(A)$，则 z 必是 A 的联合约化特征值。

(2) 若 $z\in B_d[\mathrm{conv}\overline{W(A)}]$，而且 $z\in\sigma_\pi(A)$，则 z 必是 A 的联合约化近似谱点。

(这里 $B_d(E)$) 表示集合 E 的边界) 。

证 (1)不失一般性，可假定 $z=(0,\cdots,0)$。这时可选取 C^n 中 n 个线性无关的向量 $a_1,\cdots,a_n$，使得

$\mathrm{conv}W(A)\subset\{\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n;\ \lambda_i\in C,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\arg\lambda_i\leqslant\frac{\pi}{2},i=1,\cdots,n\}$。设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是 C^n 的一个正交基，$e_i=\gamma_{i1}a_1+\cdots\gamma_{in}a_n$，$i=1,\cdots,n$。我们令 $B_i=\gamma_{i1}A_1+\cdots+\gamma_{in}A_n,i=1,\cdots,n$，则 有

$\mathrm{conv}W(B_1,\cdots,B_n)\subset\{(\beta_1,\cdots,\beta_n);\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\arg\beta_i\leqslant\frac{\pi}{2},i=1,\cdots,n\}$，这时对每个 B_i，有 $W(B_i)\subset\{z\in C;\ \mathrm{Re}z\geqslant0\}$ 。设 x 是 A 的一个非零联合特征向量，则有$B_ix=(\sum_{K=1}^{n}\gamma_{ik}A_k)x=0$。令 $c_i=(B_i+B_i^*)^{\frac{1}{2}},i=1,\cdots,n$，则对任意 $y\in H$ 有

$$|\langle(B_i+B_i^*)x,y\rangle|\leqslant\langle(B_i+B_i^*)x,x\rangle\|c_iy\|=0,$$

因此$(B_i+B_i^*)x=0$，从而 $B_i^*x=0$，$i=1,\cdots,n$。

由于数量矩阵 $M=(\gamma_{ik})_{n\times n}$ 是非奇异的，易知有

$$\begin{bmatrix}A_1^*\\ \vdots\\ A_n^*\end{bmatrix}=(M^{-1})^*\begin{bmatrix}B_1^*\\ \vdots\\ B_n^*\end{bmatrix},$$

所以有 $A_i^*x=0$，$i=1,\cdots,n$。即 0 是 A 的联合约化特征值。

(2) 设 $A^0=(A_1^0,\cdots,A_n^0)$为 A 的 Berberian 扩张，从定义可以验证 $\sigma_\pi(A)=\sigma_p(A^0)$。因此由 (1) 与引理3.2可以立即推出

(2)。证毕。

W. Arveson 曾证明了对于 $L(H)$ 中的单个算子 A，如果 $z\in S_p(A)$ 满足 $|z|=\|A\|$，则必存在 $C^*(A)$ 上的一个特征 ϕ，使得 $\phi(A)=z$，其中 $C^*(A)$ 表示由 A 与 I 生成的 C^* 代数。

引理3.4 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 Hilbert 空间 H 上交换算子组，则有 $S_p(A)\subset\text{conv}\overline{W(A)}$

证 用反证法。若存在 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in S_p(A)\backslash\text{conv}\,\overline{W(A)}$，由于 $\text{conv}\,\overline{W(A)}$ 是 C^n 中紧凸集，因此存在超平面严格分离 z 与 $\text{conv}\,\overline{W(A)}$，即存在 C^n 上的一个线性泛函 ψ 和实数 α，使 $\text{Re}\psi(z)<\alpha<\text{Re}\psi(\text{conv}\,\overline{W(A)})$。设若 $t=(t_1,\cdots,t_n)\in C^n$，$\psi(t)=\alpha_1t_1+\cdots+\alpha_nt_n$。找一可逆矩阵

$$M=\begin{pmatrix} d_1 & \alpha_2\cdots & \alpha_n \\ & * & \\ & & \end{pmatrix}_{n\times n}。$$

若记

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2\cdots\alpha_n \\ & * & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

则有 $W(B_1)=\psi(W(A))$ 和 $\psi(z)\in\psi(S_p(A))=S_p(\psi(A))=S_p(B_1)$。但又 $\text{Re}\psi(z)<\alpha<\text{Re}\overline{W(B_1)}$，这与 $S_p(B_1)\subset\overline{W(B_1)}$ 是矛盾的。这就指出了必有 $S_p(A)\subset\text{conv}\overline{W(A)}$。证毕。

现在我们可以推广前面谈到的 Arveson 命题。

定理3.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为 Hilbert 空间 H 上的交换算子组，$C^*(A)$ 是由 A 与 I 生成的 C^* 代数，若 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in S_p(A)$，且 $|z|$ 等于 A 的联合范数 $\|A\|$，则必存在 $C^*(A)$ 上的一个特征 ϕ，使得 $\phi(A_i)=z_i, i=1,\cdots,n$。

证 由引理 3.4 知 $z\in S_p(A)\subset\text{conv}\overline{W(A)}$，但又因为 $|z|=\|A\|$ 和 $\omega(A)\leqslant\|A\|$，所以 $z\in\text{Ext}(\text{conv}\,\overline{W(A)}]=\text{Ext}\overline{W(A)}\subset\overline{W(A)}$，所以这时存在 H 中的一列单位向量 $\{x_k\}$ 使得

$$\langle A_i x_k, x_k\rangle \to z_i,$$
$$i=1,\cdots,n。 \tag{3.1}$$

我们注意到 $\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2=\sup\{\sum_{i=1}^{n}\|A_i x\|^2; \|x\|=1\}$，利用（3.1)式，我们容易看出有

$$\sum_{i=1}^{n}\|(A_i-z_i)x_k\|^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\|A_i x_k\|^2-2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\overline{z_i}\langle A_i x_k,x_k\rangle+\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2$$
$$\to 0 \quad (k\to\infty),$$

所以 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\sigma_\pi(A)$。但又因 $z\in\mathrm{Bd}[\mathrm{conv}\,\overline{W(A)}]$，所以据定理 3.3，存在 H 中一列单位向量$\{x_m\}$，使得

$$(A_i-z_i)x_m\to 0,\ (A_i^*-\overline{z_i})x_m\to 0(m\to\infty)i=1,\cdots,n$$

即然$(0,\cdots,0)\in\sigma_\pi(A_1-z,\cdots,A_n-z_n,A_1^*-\overline{z_1},\cdots,A_n^*-\overline{z_n})$，因此有

$C^*(A)(A_1-z_1)+\cdots+C^*(A)(A_n-z_n)+C^*(A)(A_1^*-\overline{z_1})+\cdots+C^*(A)(A_n^*-\overline{z_n})\neq C^*(A)$，这时上述不等式的左边是$C^*(A)$的一个闭的真左理想，由算子代数知识知道，它必包含在$C^*(A)$上的某个纯态的左核中。设这个纯态为 ψ，$(\pi_\psi,H_\psi,\xi_\psi)$是由 ψ 导出的不可约表示，则有

$$\langle\pi_\psi((A_i^*-\overline{z_i})(A_i-z_i))\xi_\psi,\ \xi_\psi\rangle=\psi((A_i^*-\overline{z_i})(A_i-z_i))=0$$

$\langle\pi_\psi((A_i-z_i)(A_i^*-\overline{z_i}))\xi_\psi,\xi_\psi\rangle=\psi((A_i-z_i)(A_i^*-\overline{z_i}))=0$，$i=1,\cdots,n$。再设$(\pi,H)$ 为 $C^*(A)$ 的原子表示，即所有 $C^*(A)$ 上不可约表示的直和，则有

$$\pi(A_i)\xi_\phi=z_i\xi_\phi,\ \pi(A_i^*)\xi_\phi=\overline{z_i}\xi_\phi, i=1,\cdots,n. \tag{3.2}$$

记 $w_{\xi_\phi}(T)=\langle T\xi_\phi,\xi_\phi\rangle$ 为 H 上的向量态，则（3.2）式指出了w_{ξ_ϕ}在$\pi(C^*(A))=C^*(\pi(A))$上是可乘线性泛函并且$w_{\xi_\phi}(\pi(A_k))=z_k$，$k=1,\cdots,n$。则 $\phi=w_{\xi_\phi}\cdot\pi$ 就是$C^*(A)$上的一个特征并且

满足 $\psi(A_k)=z_k, k=1,\cdots,n$。

§4 无界正常算子组的联合数值域

在第三章中，我们已经讨论了一些有界的交换正常算子组的联合数值域的一些性质。这一节中我们继续讨论交换的无界正常算子组的联合数值域，它包括了有界情形，一些方法与结果对于有界情况也是新的，下面若不特别指出，正常算子组指最一般定义，有界无界皆在内。

定义4.1 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的正常算子组，A的联合数值域 $W(A)$定义为

$$W(A)=\{(\langle A_1x,x\rangle,\cdots,\langle A_nx,x\rangle);x\in D(A)=\bigcap_{i=1}^{n}D(A_i),$$

$\|x\|=1\}$，这里 $D(A_i)$ 是 A_i 的定义域，$i=1,\cdots,n$。

我们注意到 $D(A)$是空间 H 中的稠子空间，因为若 E 为 A 的乘积谱测度，Δ 为 C^n 中的紧集，有 $D(A)\supset E(\Delta)H$。

无界的交换正常算子组的联合数值域不必是 C^n 中有界集，但还是凸的。

引理4.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换正常算子组，则存在一族可测空间$\{(C^n,\rho_\alpha);\alpha\in\Lambda\}$使得每个 A_k 都酉等价于$\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda}L^2(C^n;\rho_\alpha)$ 上由 z_k 导出的极大乘法算子，$k=1,\cdots,n$，即

$$D(A_k)=\{(f_\alpha)\in\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}L^2(C^n;\rho_\alpha);(z_kf_\alpha)\in\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}L^2(C^n;\rho_\alpha)\}$$

和 $A_k(f_\alpha)=(z_kf_\alpha)$，$k=1,\cdots,n$。

引理 4.2 的证明可参照单个自共轭算子的函数模型构造，在这里省略了。

定理4.3 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，则 A 的联合数值域 $W(A)$是 C^n 中凸集。

证 由上面引理，我们可不失一般性，就假定$A=(A_1,\cdots,A_n)$

是由 $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} L^2(C^n;\rho_\alpha)$ 上 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 导出的极大乘法算子组。

设 $f=(f_\alpha)$，$g=(g_\alpha)\in D(A)=\bigcap_{i=1}^n D(A_i)$和$\|f\|=\|g\|=1$。则对任意 $t\in[0,1]$固定后，记 $h=(h_\alpha)=((t|f_\alpha|^2+(1-t)|g_\alpha|^2)^{\frac{1}{2}})$

$$= t\sum_{\alpha\in\Lambda}\int|z_kf_\alpha|^2d\rho_\alpha+(1-t)\sum_{\alpha\in\Lambda}\int|z_kg_\alpha|^2d\rho_\alpha<\infty, k=1,2,\cdots,n。$$

所以 $h=(h_\alpha)\in D(A)$。此外$\|h\|^2=\sum_\alpha\|h_\alpha\|^2=t\sum_\alpha\|f_\alpha\|^2+(1-t)$ $\cdot\sum\|g_\alpha\|^2=1$，因此有

$$t(\langle A_1f,f\rangle,\cdots\langle A_nf,f\rangle+(1-t)(\langle A_1g,g\rangle,\cdots,\langle A_ng,g\rangle)$$

$$=(\sum_\alpha\int z_1(t|f_\alpha|^2+(1-t)|g_\alpha|^2)d\rho_\alpha,\ \cdots,\ \sum_\alpha\int z_n(t|f_\alpha|^2+$$

$$(1-t)|g_\alpha|^2)d\rho_\alpha)=(\langle A_1h,h\rangle,\cdots,\langle A_nh,h\rangle)\in W(A),$$

所以 $W(A)$ 是 C^n 中的一个凸集。证毕。

定义4.4 设 A 如上，$z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$ 称属于 A 的联合近似点谱 $\sigma_\pi(A)$，若存在 $D(A)=\bigcap_{i=1}^n D(A_i)$ 中的一列单位向量 $\{x_i\}$，使得$\|(z_k-A_k)x_i\|\to0,(i\to\infty)$，$k=1,\cdots,n$。

引理4.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的正常算子组，则有 $S_p(A)=\sigma_\pi(A)$，并且 $z_0\in\sigma_p(A)$ 当且仅当 $E(\{z_0\})\neq\{0\}$。

这个引理不难得出，读者可作为练习。

为了证明主要定理，我们还要引进 Durzt[68] 中的一个结果。Borel 测度满足 $\mu(\Delta)=1$,则有

$$\int_\Delta zd_\mu(z)\in\Delta, z\in C^n。$$

现在我们可以证明

定理4.7 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，E 是 A 的乘积谱测度，设 S 是 C^n 中满足 $E(\Delta)=I$ 的凸 Borel 集 Δ 的全体，则我们有

$$W(A)=\bigcap_{\Delta\in S}\Delta。$$

证 记 $V(A)=\bigcap_{\Delta\in S}\Delta$

(1) 对任何 $\Delta\in S$ 和 $x\in D(A)$，$\|x\|=1$，$\int_\Delta zd\|E(z)x\|^2$ 是一个关于概率测度 $\mu_x=\|E(\cdot)x\|^2$ 的Bochner 积分，据引理4.6有

$$(\langle A_1x,x\rangle,\cdots,\langle A_nx,x\rangle)$$

$$=(\int_{S_p(A_1)}z_1d\langle E_1(z_1)x,x\rangle,\cdots,\int_{S_p(A_n)}z_nd\langle E_n(z_n)x,x\rangle)$$

$$=(\int_\Delta z_1d\langle E(z)x,x\rangle,\cdots,\ \int_\Delta z_nd\langle E(z)x,x\rangle)$$

$$=\int_\Delta zd\|E(z)x\|^2\in\Delta。$$

这就证明了 $W(A)\subset V(A)$。

(2) 现在我们证明 $V(A)\subset W(A)$。

因为 $S_p(A)=\sigma_\pi(A)$(引理4.5)及 $W(A)$凸(定理4.3)，我们有 $\operatorname{conv}(S_p(A))\subset\overline{W(A)}$。考虑任何 $z_1\in V(A)$，易知此时有 $z_0\in\operatorname{couv}S_p((A))$。

如果 $E(\{z_0\}\neq0$，则 $z_0\in\sigma_P(A)\subset W(A)$。

如果 $z_0\in\operatorname{int}(\operatorname{conv}(S_p(A))$，则 $z_0\in\operatorname{int}\overline{W(A)}\subset W(A)$，由于 $W(A)$是凸集。

这样只须考虑 $z_0\in Bd[\operatorname{conv}S_P(A)]$，并且 $E(\{z_0\})=0$。

将 C^n 看成是维数为 $2n$ 的实线性空间，这时存在一个维数为 $2n-1$ 的超平面在 z_0 点支撑着 $\operatorname{conv}(S_p(A))$。将 z_0 取作原点，我们建立一个 R^{2n} 中的直角坐标系如下所作。

首先这样定义 x_1-轴，它使得超平面 π 的方程 $x_1=0$，并且 $\operatorname{conv}(S_p(A))$ 在 $x_1\geqslant0$ 的一边。

在 $x_1=0$ 中，如果每个开的半空间 e 都有 $E(e)\neq0$，则必然对每个 e 都存在紧子集 $\Delta\subset e$，使得 $E(\Delta)\neq0$。因此可以取到一个单位向量 $x\in E(\Delta)H\subset D(H)$。这时据引理 4.6 有

$$\lambda_e=(\langle A_1x,x\rangle,\cdots,\langle A_nx,x\rangle)=\int_\Delta zd\|E(z)x\|^2\in\Delta\subset e。$$

既然 e 是 π 中任意的开半空间，我们就可以选取某些 λ_e 点使 z_0含

在其凸包中，因为 $W(A)$ 凸，$\lambda_e \in W(A)$，因此有 $z_0 \in W(A)$。

否则，将存在一个 π 中半空间 e，使得 $E(e)=0$。这时我们确定 x_2- 轴使得 $e=\{x_1=0,x_2<0\}$。用 $\{x_1=0,x_2=0\}$ 替代上面的 $\{x_1=0\}$，重复上面的过程，这样或者到某一步我们已可得到 $z_0 \in W(A)$，或者最后定义了全部 R^{2n} 中一个直角坐标系，并且有

$$E\{x_1<0\}=0,$$
$$E\{x_1=0,x_2<0\}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E\{x_1=x_2=\cdots=x_{2n-2}=0,x_{2n-1}<0\}=0。$$

令 $S_1=\{x_1=\cdots=x_{2n-1}=0,x_{2n}<0\}$，

$$S_2=\{x_1=\cdots=x_{2n-1}=0,x_{2n}>0\}。$$

则必有 $E(S_i)\neq 0$，$i=1,2$。事实上若 $E(S_1)=0$，注意到 $E\{z_0\}=0$，令 $M=\{x_1>0\}\cup\{x_1=0,x_2>0\}\cup\cdots\cup\{x_1=\cdots=x_{2n-1}=0,x_{2n}>0\}$，则有 $E(M)=I$，而且显然 M 是凸集，但 $z_0=(0,\cdots,0)\overline{\in}M$，这与 z_0 的定义是相矛盾的。同样可以证明 $E(S_2)\neq 0$。这样必分别存在紧的凸子集 $\Delta_1\subset S_1$ 和 $\Delta_2\subset S_2$ 使得 $E(\Delta_i)\neq 0$，$i=1,2$。因此可找到两个单位向量 $x_1\in E(\Delta_1)H$ 和 $x_2\in E(\Delta_2)H$，显然 $x_i\in D(A)$，$i=1,2$。因为 Δ_i 凸，因此据引理4.6有

$$y_i=(\langle A_1x_i,x_i\rangle,\cdots,\langle A_nx_i,x_i\rangle)\in\Delta_i\subset S_i,\ i=1,2。$$

因此还是有 $z_0\in \mathrm{conv}\{y_1,y_2\}\subset \mathrm{conv}W(A)=W(A)$。证毕。

定理 4.7 对于 $W(A)$ 是比较深刻的刻画，由此我们立即可以得到一些有意义的推论，而这些推论即是对于单个正常算子，它的原始证明也是比较繁琐的。

推论4.8 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，则有 $\overline{W(A)}=\overline{\mathrm{conv}(S_p(A))}$。

证 从定理 4.7 的证明中不难得出。证毕。

推论4.9 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的正常算子组，λ 属

于$\overline{W(A)}$的端点集合$\mathrm{Ext}\,\overline{W(A)}$，则有$\lambda\in S_p(A)$。

证　设$\lambda\in\mathrm{Ext}\,\overline{W(A)}$，若$\lambda\overline{\in}S_p(A)$，则必存在$\lambda$的一个邻域$O_\lambda$使得$E(O_\lambda)=0$。我们容易知道$M=\overline{\mathrm{conv}}(\overline{W(A)}/O_\lambda)$是$C^n$中的一个凸Borel集并且有$E(M)=I$。据定理4.7我们有$\lambda\in\overline{W(A)}\subset M$。但另一方面$\lambda\in O_\lambda\cap\mathrm{Ext}\,\overline{W(A)}$，这就指出了$\lambda\overline{\in}M$，因此产生了矛盾，故有$\lambda\in S_p(A)$。证毕。

推论4.10　设$A=(A_1,\cdots,A_n)$为交换的正常算子组，如果$\lambda\in W(A)\cap\mathrm{Ext}\,\overline{W(A)}$，则有$\lambda\in\sigma_p(A)$。

证　设$\lambda\in W(A)\cap\mathrm{Ext}\overline{W(A)}$，若$\lambda\overline{\in}\sigma_P(A)$，则$E(\{\lambda\})=0$，从而$\overline{W(A)}\backslash\{\lambda\}$仍然是一凸集。据定理4.7可知$\lambda\in\overline{W(A)}\backslash\{\lambda\}$，这是不可能的，因此$\lambda\in\sigma_p(A)$。证毕。

从上面几个推论可以看出$S_p(A)$与$W(A)$的联系。对于交换的正常算子组A，，第九章中已介绍了由A生成的两类无界算子代数——GB^*代数$\mathscr{A}$与EC^*代数$\mathscr{U}$。下面我们讨论它们与$W(A)$的联系。

引理4.11　（夏道行[20]）设R是具有单位元e的，对称，完备，赋可列半范代数，又设f是R上的正泛函，那末f是连续的。

定义4.12　设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的正常算子组，E是A的乘积谱测度，定义

$R=\{E(f)=\int fdE;f$ 是$S_p(A)$上局部有界可测函数$\}$ R上拓扑有这样一列半范$P_m(T)=\|E(\Delta_m)T\|$决定，其中$\{\Delta_m\}$是C^n中一列单调增趋于C^n的紧子集。

我们容易验证，R是满足引理4.11条件的。事实上它还是一个GB^*代数。

定理4.13　设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的正常算子组，R是

上述的 GB^* 代数，令

$$U(A)=\{(f(A_1),\cdots,f(A_n)):f \text{ 为 } R \text{ 上态}\},$$

这时必有 $\overline{W(A)}=\overline{U(A)}$。

证 设 $D=\bigcap_{T\in R}D(T)$，$W_D(A)=\{(\langle A_1x,x\rangle,\cdots\langle A_nx,x\rangle):x\in D,\|x\|=1\}$，则从定理 4.7 的证明中可以看出同样有 $W_D(A)=\bigcap_{\Delta\in S}\Delta$，因此有 $W(A)=W_D(A)$。

现取 $x\in D,\|x\|=1$，则 $T\to\langle Tx,x\rangle$ 显然是 R 上的一个向量态，这就证明了 $W(A)\subset U(A)$。

反之，如果存在态 f，使得 $\lambda_0=f(A)\ \overline{\in}\ \overline{W(A)}$，则由于 $\overline{W(A)}$ 是闭凸集，故存在超平面将 λ_0 与 $\overline{W(A)}$ 严格分离。不失一般性，我们可以假定 A 不是正则的（否则可作适当平移，因为 $W(A)$ 与 $U(A)$ 都是关于 A 线性的）。现取定义 4.12 中的那一列 C^n 中紧子集 $\{\Delta_m\}$，那么

$$A_m=E(\Delta_m)A=(E(\Delta_m)A_1,\cdots,E(\Delta_m)A_n)$$

是 H 上的有界的交换正常算子组，利用 R 的函数模型可知

$$S_p(A_m)=\{\Delta_m\cap S_p(A)\}\cup\{(0,\cdots,0)\}\subset S_p(A)。$$

据推论 4.8 有

$$\overline{W(A_m)}=\text{conv}(S_p(A_m))\subset\overline{\text{conv}(S_p(A))}=\overline{W(A)}。$$

设 $C^*(A_m)$ 是由 A_m 生成的有单位元的 C^* 代数，显然 $C^*(A_m)$ 是 R 的闭子代数，f 在 $C^*(A_m)$ 上作用还是态，据Ⅲ定理 3.5 有

$$f(A_m)\in\overline{W(A_m)}\subset\overline{W(A)}。$$

但在 D 的拓扑下，有 $A_m\to A$（指每个分量都取极限），而且 f 是 R 上的正泛函，因此据引理 4.11 知 f 是连续的，因此有 $f(A_m)\to f(A)=\lambda_0$，但这与 $\overline{W(A)}$ 被平面严格分离是矛盾的，故有 $\overline{U(A)}\subset\overline{W(A)}$，因此得到 $\overline{U(A)}=\overline{W(A)}$。证毕。

对于 D 上的 EC^* 代数$\mathscr{U}$，Inoue[88]中定义了一种称为弱连续的线性泛函，它满足对于任何$\mathscr{U}$中的一个网$\{T_\alpha\}$和$T\in\mathscr{U}$，若对任何 D 上向量 ξ，η 都有 $\lim\limits_\alpha\langle T_\alpha\xi,\eta\rangle=\langle T\xi,\eta\rangle$，则$\lim\limits_\alpha\varphi(T_\alpha)=\varphi(T)$。下面我们用这种泛函刻划 $W(A)$，而上面刻划了$\overline{W(A)}$。

引理4.14 （A. Inoue [88]） 设$\mathscr{U}$是 D 上的 EC^* 代数，φ 是$\mathscr{U}$上的一个正线性泛函，则下列等价：

（1） φ 是弱连续的；

（2） 存在 $\xi_i\in D$，$i=1,\cdots,k$ 使得对任何 $T\in\mathscr{U}$ 有

$$\varphi(T)=\sum_{i=1}^k\langle T\xi_i,\xi_i\rangle。$$

这个引理可立即导出

定理4.15 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的正常算子组，$\mathscr{U}$ 是由 A 生成的 GB^* 代数，记 $\varepsilon=\{\varphi:\varphi$ 为 $\mathscr{U}$ 上弱连续的正泛函，$\varphi(I)=1\}$，则有

$$W(A)=\{(\varphi(A_1),\cdots,\varphi(A_n)):\ \varphi\in\Sigma\}。$$

证 同定理 4.13 中证明一样，可证 $W(A)=W_D(A)$。因此只须证明 $W_D(A)=\{\varphi(A):\varphi\in E\}$。

设 $\varphi\in\varepsilon$，由引理 4.1 知必存在 $\xi_i\in D$，$i=1,\cdots,k$，使对任何 $T\in\mathscr{U}$，有 $\varphi(T)=\sum\limits_{i=1}^k\langle T\xi_i,\xi_i\rangle$，注意到$\varphi(I)=\sum\limits_{i=1}^k\|\xi_i\|^2=1$，

因此

$$(\varphi(A_1),\cdots,\varphi(A_n))$$

$$=\sum_{i=1}^{i}\|\xi_i\|^2\left(\left\langle A_1\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|},\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|}\right\rangle,\cdots,\left\langle A_n\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|},\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|}\right\rangle\right)$$

$$\in W_D(A),$$

而 $W_D(A)\subset\{\varphi(A):\varphi\in\varepsilon\}$ 是显然的。证毕。

第十一章 压缩算子组的联合谱与$A_{\aleph_0}$代数

近年来，运用Brown 技巧讨论某些算子的不变子空间的问题有较大的进展。最近又有很多文献讨论一类由单个算子生成的对偶代数的$A_{\aleph_0}$性质的问题。在这些文献，$A_{\aleph_0}$-性与算子的谱是紧密相连的。见［100］、［101］、［41］等。我们在本章中，主要讨论多个算子生成的对偶代数的$A_{\aleph_0}$性问题，这些问题同样与算子组的联合谱紧密相连的。

§1 重交换压缩算子组的联合酉扩张

本节内容是为下节作准备工作的。主要讨论多个算子的酉扩张理论，这是Nagy-Foias 压缩算子理论的推广。

我们知道，多个交换的压缩算子组的酉扩张并不一定存在。既使存在，它们的最小酉扩张也不一定是唯一的。但在重交换的条件下这种酉扩张是存在的。

定义1.1 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是Hilbert 空间H上交换的压缩算子组。若有 Hilbert 空间$K\supset H$，使得任意$k=(k_1,\cdots,k_n)$ $k_j=0,\pm1,\cdots$，$P_H U_1^{k_1}\cdots U_n^{k_n}|_H=T_1^{[k_1]}\cdots T_n^{[k_n]}$，其中$T_j^{[k_j]}=T_j^{k_j}$，$j\geqslant 0$，$T_j^{[k_j]}=T_j^{*|k_j|}$，$k_j<0$。则称$U=(U_1,\cdots,U_n)$是$T$的一个联合酉扩张。若不存在Hilbert 空间$K_0$，使$H\subsetneqq K_0\subsetneqq K$，且$K_0$是$U$的约化子空间，则称$U$是$T$的最小酉扩张。

注：若U是T的酉扩张，则$\widetilde{U}=(U,U)$不一定是$\widetilde{T}=(T,T)$的联合酉扩张。

命题1.2 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$是重交换的压缩算子组，则T的联合酉扩张是存在的，且在酉等价意义下，最小酉扩张是唯一的。

证 与单个算子的证明相类似，详见［108］。

由于n个算子的情形与2个算子的情形无原则区别，为书写方便起见，以下都只考虑$n=2$。

记$U=(U_1,U_2)$是(T_1,T_2)的联合酉扩张。记

$L_0^j=\overline{(U_j-T_j)H},\qquad L_1^j=\overline{(U_j^*-T_j)H},j=0,1$。

$$L_{00}=\overline{(U_1U_2-U_1T_2-U_2T_1+T_1T_2)H},$$

$$L_{01}=\overline{(U_1U_2^*-U_1T_2^*-U_2^*T_1+T_1T_2^*)H},$$

$$L_{10}=\overline{(U_1^*U_2-U_1^*T_2-U_2T_1+T_1^*T_2)H},$$

$$L_{11}=\overline{(U_1^*U_2^*-U_1^*T_2^*-U_2^*T_1^*+T_1^*T_2^*)H}。$$

命题1.3 $T=(T_1,T_2)$ 是重交换的压缩算子组，U是T的联合酉扩张，则

(1) $L_{ij}(i,j=0,1)$ 为 U 的 Wandering 子空间，即若$(k_1,k_2)\neq(k_1',k_2')$ 则 $U_1^{k_1}U_2^{k_2}L_{ij}\perp U_1^{k_1'}U_2^{k_2'}L_{ij}$，且

$$\dim L_{00}=\dim\overline{(I-T_1^*T_1)(I-T_2^*T_2)H},$$

$$\dim L_{01}=\dim\overline{(I-T_1^*T_1)(I-T_2T_2^*)H},$$

$$\dim L_{10}=\dim\overline{(I-T_1T_1^*)(I-T_2^*T_2)H},$$

$$\dim L_{11}=\dim\overline{(I-T_1T_1^*)(I-T_2T_2^*)H}。$$

(2) K 可以分解为 $\oplus K_{ij}$，其中 $K_{00}=H$，

$$K_{n0}=U_1^{n-1}L_0^1,n\geq1;\ K_{n0}=U_1^{n+1}L_1^1,n\leq-1,$$

$$K_{0n}=U_2^{n-1}L_0^2,n\geq1;\ K_{0n}=U_2^{n+1}L_1^2,n\leq-1,$$

$$K_{nm}=U_1^{n-1}U_2^{m-1}L_{00},\ n\geq1,m\geq1;\ K_{nm}=U_1^{n+1}U_2^{m-1}L_{10},$$

$$m\geq1,\ n\leq-1,$$

$$K_{nm}=U_1^{n-1}U_2^{m+1}L_{01},\quad n\geqslant 1, m\leqslant -1;$$

$$K_{nm}=U_1^{n+1}U_2^{m+1}L_{11}, n\leqslant -1, m\leqslant -1,$$

且对任意 i，$\bigoplus\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}$ 是 U_1 的约化子空间，任意 j，$\bigoplus\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}$ 是 U_2 的约化子空间。

证　直接验证可知$(i,j)\neq(n,m)$ 时，$K_{ij}\perp K_{nm}$，从而直和符号是有意义的。又可验证 $U_1L_{10}+U_1L_0^2=L_0^2\oplus L_{00}$，$U_1L_1^1\oplus U_1H=L_0^1\oplus H$，于是 $\bigoplus\limits_{j}K_{ij}$ 是 U_1 的约化子空间。又可定义 L_{00} 到 $(1-T_1^*T)(1-T_2^*T_2)H$ 的映射 φ_{00}：$(U_1U_2-U_1T_2-U_2T_1+T_1T_2)h\to(1-T_1^*T_1)(1-T_2^*T_2)h$，则可验证 φ_{00} 是等距。由于验证较长，详细的步骤略去。

若每个 T_j 都是完全非酉的，即不存在 T_j 的约化子空间使 T_j 在其上限制是酉算子，则称 T 是完全非酉的。

L 若是某子空间，记 $M_jL=\bigoplus\limits_{-\infty}^{\infty}U_j^kL$，$M_j^+L=\bigoplus\limits_{k=0}^{\infty}U_j^kL$，$j=1,2$，$ML=\bigoplus\limits_{k_1,k_2}U_1^{k_1}U_2^{k_2}L$，$M^{++}L=\bigoplus\limits_{k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}U_1^{k_1}U_2^{k_2}L$。

命题1.4　$T=(T_1,T_2)$ 是完全非酉的重交换的压缩算子组，则

$$M_1L_{10}^*\vee M_1L_{00}=\bigoplus_n K_{1n},\tag{4.1}$$

$$M_1L_{11}^*\vee M_1L_{01}^*=\bigoplus_n K_{-1n},\tag{4.2}$$

$$M_2L_{01}^*\vee M_2L_{00}=\bigoplus_n K_{n1},\tag{4.3}$$

$$M_2L_{11}^*\vee M_2L_{10}^*=\bigoplus_n K_{n,-1},\tag{4.4}$$

$$ML_{00}\vee ML_{00}^*\vee ML_{10}^*\vee ML_{11}^*=K。\tag{4.5}$$

证　若$(U_2-T_2)h\in L_0^2$，但$(U_2-T_2)h\perp M_1L_{10}^*\vee M_1L_{00}$，则若 $h'\in H$，

$$\langle(U_2-T_2)h, U_1^{*k}(U_1U_2-U_1T_2-U_2T_1+T_1T_2)h'\rangle$$
$$=\langle U_2h, U_1^{*k-1}U_2h'\rangle-\langle T_2h, U_1^{*k-1}U_2h'\rangle-\langle U_2h,$$

$$
\begin{aligned}
&U_1^{*k-1}T_2h'\rangle+\langle T_2h,U_1^{*k-1}T_2h'\rangle\\
&-\langle U_2h,U_1^{*k}U_2T_1h'\rangle+\langle T_2h,U_1^{*k}U_2T_1h'\rangle+\\
&\langle U_2h,U_1^{*k}T_1T_2h'\rangle-\langle T_2h,U_1^{*k}T_1T_2h'\rangle\\
&=\langle h,T_1^{*k-1}h'\rangle-\langle T_2h,T_1^{*k-1}T_2h'\rangle-\langle h,T_1^{*}T_1h'\rangle\\
&+\langle T_2h,T_1^{*k}T_2T_1h'\rangle\\
&=\langle h,T_1^{*k-1}(I-T_1^*T_1-T_2^*T_2+T_1^*T_1T_2^*T_2)h'\rangle\\
&=0。
\end{aligned}
$$

由 h' 的任意性得 $(I-T_1^*T_1)(I-T_2^*T_2)T_1^{k-1}h=0,k=1,2,\cdots$ 同样由 $(U_2-T_2)h\perp M_1L_{00}$ 得 $(I-T_1T_1^*)(I-T_2^*T_2)T_1^{*k-1}h=0$，$k=1,2,\cdots$。由 T 的完全非酉性得 $(I-T_2^*T_2)h=0$。但 $\|(U_2-T_2)h\|=\|(I-T_2^*T_2)h\|=0$，于是 $(U_2-T_2)h=0$，从而得到 $L_0^2\subset M_1L_{10}^*\vee M_1L_{100}$。再由 $U_1L_{10}\oplus U_1L_0^2=L_0^2\oplus L_{00}$，不难得到(4.1)。

类似可证 (4.2)～(4.4)式。

又 $H\subset M_1L_0^1\vee M_1L_1^1$ 得到 $H\subset ML_{00}\vee ML_{10}^*\vee ML_{01}^*\vee ML_{11}^*$，故(4.5)也成立。证毕。

命题1.5 T 如上，记

$$K^{++}=\bigoplus_{n\geq 0;\ m\geq 0}K_{nm}=H\oplus M_1^+L_0^1\oplus M_2^+L_0^2\oplus M^{++}L_{00},$$

则 $K^{++}=M^{++}L_{11}^*\oplus M_1^+(U_1S_1)\oplus M_2^+(U_2S_2)\oplus S$,

而 $K=ML_{11}^*\oplus M_1(U_1S_1)\oplus M_2(U_2S_2)\oplus S$,

其中 $S_1=(L_1^1\oplus M_2^+L_{00})\ominus M_2^+(U_2L_{11})$,

$S_2=(L_1^2\oplus M_1^+L_{01})\ominus M_1^+(U_1L_{11})$,

$S=K^{++}\ominus(M^{++}L_{11}^*\oplus M_1^+(U_1S_1)\oplus M_2^+(U_2S_2))$.

证 $S_1=(\bigoplus_n K_{n,-1})\ominus M_2L_{11},S_2=(\bigoplus_m K_{-1,m})\ominus M_1L_{11}$ 知，S_1、S_2 分别是 U_1 U_2 的约化子空间。

由 $(L_1^1\oplus M_2^+L_{10})\perp(L_1^2\oplus M_1^+L_{01})$ 得 $S_1\perp S_2$。

若 $f\in S_1,g\in S_2$，任意 $k_1,k_2>0$，$U_1^{*k_1}g\in S_2$，$U_2^{*k_2}f\in S_1$，于是 $\langle U_1^{k_1}f,U_2^{k_2}g\rangle=\langle U_2^{*k_2}f,U_1^{*k_1}g\rangle=0$，于是 $M_1(U_1S_1)\perp M_2(U_2S_2)$。

又 $S_1=(\bigoplus_n K_{n,-1})\ominus M_2L_{11}$，故 $M_1(U_1S_1)=(\bigoplus_k U_1^k(\bigoplus_n K_{n,-1})$ $\ominus ML_{11}$ 得 $ML_{11}^*\perp M_1(U_1S_1)$。同样 $ML_{11}^*\perp M(U_2S_2)$。

记 $J_0=(\bigoplus_n K_{0n})\ominus M_1L_1^1$，则 $\bigoplus_{n\geq 0} K_{0n}=J_0\oplus M_1^+(U_1L_1^1)$，

$$J_1=(\bigoplus_n K_{1n})\ominus M_1L_{00}，则 \bigoplus_{n\geq 0} K_{1n}=J_1\oplus M_1^+(L_{10}^*)，$$

这样 $K^{++}=H\oplus M_1^+L_0^1\oplus M_2^+L_0^2\oplus M^{++}L_{00}$

$$=J_0\oplus M_1^+(U_1L_1^1)\oplus M_2^+(J_1\oplus M_1^+L_{10}^*)$$

$$=J_0\oplus M_1^+(U_1L_1^1)\oplus M_2^+J_1\oplus M^{++}L_{10}^*$$

$$=J_0\oplus M_2^+(J_1)\oplus M_1^+(U_1(M_2^+(U_2L_{11})\oplus S_1))$$

$$=J_0\oplus M_2^+J_1\oplus M^{++}L_{11}^*\oplus M_1^+(U_1S_1)。$$

由对称性得 $M_2^+(U_2S_2)\subset K^{++}$。

$$K^{++}=K\ominus((\bigoplus U_1^{*k_1}U_2^{k_2}L_{10})\oplus(\bigoplus U_1^{k_1}U_2^{*k_2}L_{01})\oplus$$

$$(\bigoplus U_1^{*k_1}U_2^{*k_2}L_{11})\oplus(\bigoplus U_1^{*k}L_1^1)\oplus(\bigoplus U_2^{*k}L_1^2)$$

$$=S\oplus M^{++}L_{11}^*\oplus(M_1(U_1S_1)\ominus(\bigoplus_{K\geq 0}U_1^{*k}S_1))\oplus$$

$$(M_2(U_2S_2)\ominus(\bigoplus U_2^{*k}S_2))$$

$$=S\oplus M^{++}L_{11}^*\oplus M_1^+(U_1S_1)\oplus M_2^+(U_2S_2)。$$ 证毕。

命题1.6 记 $M(L_{ij})$ 的投影为 P_{ij}，i，$j=1,2$；$M_i(U_iS_i)$ 的投影为 P_i，$i=1,2$，则

$$P_{11}M_1^+(L_{01}^*)\subset M_1^+(L_{11}^*) \quad (6.1)$$

$$P_{10}M_1^+(L_{00})\subset M_1^+(L_{10}) \quad (6.2)$$

$$P_{11}M_2^+(L_{10}^*)\subset M_2^+(L_{11}^*) \quad (6.3)$$

$$P_{01}M_2^+(L_{00})\subset M_2^+(L_{01}) \quad (6.4)$$

$$\overline{(1-P_{11})M(L_{01}^*)}=M_2(U_2S_2) \quad (6.5)$$

$$(1-P_{11})M(L_{10}^*)=M_1(U_1S_1) \quad (6.6)$$

$$\overline{(1-P_1-P_2-P_{11})M(L_{00})}=S \quad (6.7)$$

证 设 $f\in L_{00}$，$g\in L_{10}^*$。则对任意 $i\geq 0$，$j<0$ 时，$\langle U_1^if,U_1^jg\rangle=\langle U_1^{i-j}f,g\rangle=0$，最后等号是由于 $U_1^{i-j}\in U_1M^+(L_{00})$。

而 $g\in U_1L_{10}$。这样得到 (6.1)。类似可得 (6.2)～ (6.4)。

又由 $M_2(U_2S_2)=\overline{(1-P_{11})(ML_{11}^*\vee ML_{01}^*)}$ 及 $M_1(U_1S_1)=\overline{(1-P_{11})(ML_{11}^*\vee M_{10}^*)}$ 得 (6.5)～ (6.6)。又

$$
\begin{aligned}
S&=(1-P_{11}-P_1-P_2)K\\
&=\overline{(1-P_{11}-P_1-P_2)(ML_{11}^*\vee ML_{10}^*\vee ML_{01}^*\vee ML_{00})}\\
&=\overline{(1-P_{11}-P_1-P_2)ML_{00}}\text{。证毕。}
\end{aligned}
$$

命题 1.7 T 如前，记

$$
D_{11}=\overline{(1-T_1T_1^*)(1-T_2T_2^*)H},\quad D_{10}=\overline{(1-T_1T_1^*)(1-T_2^*T_2)H},
$$

$$
D_{01}=\overline{(1-T_1^*T_1)(1-T_2T_2^*)H},\ D_{00}=\overline{(1-T_1^*T)(1-T_2^*T_2)H}\text{。}
$$

θ_j 为 T_j 的特征函数，$\Delta_j=(1-\theta_j^*\theta_j)^{\frac{1}{2}}$，$j=1,2$ [19]。$\Delta=\Delta_1\Delta_2$，则存在酉算子 W，使

$$
\begin{aligned}
WKW^{-1}=&L^2\otimes L^2\otimes D_{11}\oplus\overline{\Delta_1L^2\otimes L^2\otimes D_{01}}\oplus\overline{\Delta_2L^2\otimes L^2\otimes D_{10}}\\
&\oplus\overline{\Delta L^2\otimes L^2\otimes D_{00}},
\end{aligned}\tag{7.1}
$$

$$
\begin{aligned}
WK^{++}W^{-1}=&H^2\otimes H^2\otimes D_{11}\oplus\overline{\Delta_1L^2\otimes H^2\otimes D_{01}}\oplus\overline{\Delta_2H^2\otimes L^2\otimes D_{10}}\\
&\oplus\overline{\Delta L^2\otimes L^2\otimes D_{00}},
\end{aligned}\tag{7.2}
$$

$$
\begin{aligned}
WHW^{-1}=&K^{++}\ominus\{(\theta_1f_1+\theta_2f_2)\oplus(\Delta_1f_2+\theta_2g_2)\oplus(\theta_1g_1+\\
&\Delta_2f_2)\oplus(\Delta_1g_1+\Delta_2g_2);\\
&f_1\in H^2\otimes H^2\otimes D_{01},\ f_2\in H^2\otimes H^2\otimes D_{10},\ g_1\in\overline{\Delta_2L^2\otimes H^2\otimes D_{00}},\\
&\overline{g_2\in\Delta_1H^2\otimes L^2\otimes D_{00}}\},
\end{aligned}\tag{7.3}
$$

其中$L^2=L^2\left(S,\frac{1}{2\pi}dt\right)$，$H^2$ 为 L^2 中的 Hardy 空间。

而若 $u=u_{11}\oplus u_{01}\oplus u_{10}\oplus u_{00}\in WKW^{-1}$，P 为 WHW^{-1} 投影，

$$
\begin{aligned}
P_u=u-[&(\theta_1u_1+\theta_2u_2-\theta_1\theta_2u_0)\oplus(\Delta_1u_1+\theta_2v_2-\theta_2\Delta_2u_0)\oplus(\theta_1v_1\\
&+\Delta_2v_2-\theta_1\Delta_1u_0)\oplus(\Delta_1v_1+\Delta_2u_2-\Delta_1\Delta_2u_0))
\end{aligned}
$$

其中 $u_1(e^{it_2})=\frac{1}{2\pi}\int\left((\theta_1^*(e^{it_1})u_{11}(e^{it})+\Delta_1u_{01}(e^{it})\right)dt$，

$$u_2(e^{it_1})=\frac{1}{2\pi}\int(\theta_2^*(e^{it_1})u_{11}(e^{it})+\Delta_2u_{10}(e^{it}))\,dt,$$

$$v_1(e^{it_2})=\frac{1}{2\pi}\int(\theta_1^*(e^{it_2})u_{10}(e^{it})+\Delta_1u_{00}(e^{it}))dt_1,$$

$$v_2(e^{it_1})=\frac{1}{2\pi}\int(\theta_2^*(e^{it_1})u_{01}(e^{it})+\Delta_2u_{00}(e^{it})dt_2,$$

$$u_0=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\iint(\theta_1^*\theta_2^*u_{11}+\theta_2^*\Delta_1u_{01}+\theta_1^*\Delta_2u_{10}+$$

$$\Delta_1\Delta_2u_{00})dt_1dt_2。$$

证　如果把$M_1^+L_{01}^*$按"F"展开，即若$f\in M_1^+L_{01}^*$，$f=\sum U_1^kf_k$，令$\hat{f}=\sum f_ke^{ikt}$，由命题1.6和[108]得到$L(L_{01}^*,L_{11}^*)$值的解析函数$\hat{\theta_1}$，使得$f\in M^+(L_{01}^*)$，有$\widehat{P_{11}f}=\hat{\theta_1}\hat{f}$。同样有$L(L_{10}^*,L_{11}^*)$值的解析函数$\hat{\theta_2}$，$L(L_{00},L_{10}^*)$值的解析函数$\tilde{\theta}_1$，$L(L_{00},L_{01}^*)$值的解析函数$\tilde{\theta}_2$，使得当$f$分别在$M_2^+(L_{10}^*)$、$M_1^+(L_{00})$、$M_2(L_{00})$时，$\widehat{P_{11}f}=\hat{\theta}_2\hat{f}$，$\widehat{P_{10}f}=\tilde{\theta}_1\hat{f}$，$\widehat{P_{01}f}=\tilde{\theta}_2\hat{f}$。

由命题1.4，$K=M(L_{11}^*)\ominus M_1(U_1S_1)\oplus M_2(U_2S_2)\oplus S$，而由命题1.6，$\overline{(1-P_{11})M(L_{01}^*)}=M_2(U_2S_2)$，故$\Phi_2$：$(1-P_{11})f)\to\hat{\Delta}_1\hat{f}$是等距算子，于是延拓为$M(U_2S_2)$到$\overline{\hat{\Delta}_1L^2\otimes L^2\otimes L_{01}^*)}$上的酉算子。同样有$\Phi_3$是$M_1(U_1S_1)$到$\overline{\hat{\Delta}_2L^2\otimes L^2\otimes L_{10}^*}$上的酉算子。且当$f\in M(L_{00})$有$\Phi_2(P_2f)=\Phi_2P_2P_{01}f=\Phi_2(1-P_{11})P_{01}f=\hat{\Delta}_1\tilde{\theta}_2\hat{f}$，同样$\Phi_3(P_1f)=\hat{\Delta}_2\tilde{\theta}_1\hat{f}$。

又$\overline{(1-P_{11}-P_1-P_2)M(L_{00})}=S$，这样又可在$S$的稠集上定义$\Phi_4(1-P_{11}-P_1-P_2)f=(1-\tilde{\theta}_1^*\hat{\Delta}_2^2\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_2^*\hat{\Delta}_1^2\tilde{\theta}_2-\tilde{\theta}_2^*\hat{\theta}_1^*\hat{\theta}_1\tilde{\theta}_2)^{\frac{1}{2}}\hat{f}$。

设Φ_1是$M(L_{11}^*)$与$L^2\otimes L^2\otimes L_{11}^*$的酉映射：$\Phi_1(\sum U_1^{k_1}U_2^{k_2}f_k)=$

$\sum f_K e^{ik_1t_1}e^{ik_2t_2}$。

令 $W=\Phi_1\oplus\Phi_2\oplus\Phi_3\oplus\Phi_4$。由于 L_{ij}^* 与 D_{ij} 的维数是相同的，经过计算可以知道在同构对应之下，$\theta_j|_{D_{00}}=\hat{\theta}_j, j=1,2, \tilde{\theta}_1=\theta_1|_{D_{01}}, \tilde{\theta}_2=\theta_2|_{D_{10}}$，于是（7.1）式成立。

又由于 $K^{++}=M^{++}(L_{11}^*)\oplus M_1^+(U_1S_1)\oplus M_2^+(U_2S_2)\oplus S$，（7.2）式亦成立。

$H=K^{++}\ominus(X_1\vee X_2)$，其中 $X_1=M^{++}L_{10}^*\oplus M_2(\overline{S_2})=M_2^+L_0^2\oplus M^{++}L_{00}$，$X_2=M^{++}L_{01}^*\oplus M_1^+(\overline{S_1})$，而 $\overline{S_2}=(\bigoplus_{n\geq 0}K_{n1})\ominus M_1L_{10}^*=(I-P_{10})M_1L_{00}$，$\overline{S_1}=(\bigoplus_{n\geq 0}K_{1n})\ominus M_2L_{01}^*=(1-P_{01})M_1L_{00}$。

直接计算知若 $f\in(1-P_{10})M_1L_{00}$ 时，$f=(1-P_{10})g$，

$$
\begin{aligned}
Wf&=W(P_2+P_0)f\\
&=\Phi_3P_2(1-P_{10})g+\Phi_4P_0g\\
&=\Phi_3(1-P_{11})P_{10}g+\Phi_4P_0g\\
&=(\hat{\Delta}_1\tilde{\theta}_2+\hat{\Delta}_1\tilde{\Delta}_2)\hat{g},
\end{aligned}
$$

于是

$$
WX_1=\{(\hat{\theta}_1f\oplus\hat{\Delta}_1f\oplus\tilde{\theta}_1g\oplus\tilde{\Delta}_1g;\ f\in H^2\otimes H^2\otimes L_{10}^*, g\in\overline{\Delta_2L^2\otimes H^2\otimes L_{00}}\},
$$

$$
WX_2=\{(\hat{\theta}_2f\oplus\tilde{\theta}_2g\oplus\hat{\Delta}_1f\oplus\tilde{\Delta}_2g; f\in H^2\otimes H^2\otimes L_{01}^*, g\in\overline{\Delta_1H^2\otimes L^2\otimes L_{00}}\},
$$

这样（7.3）中用 L_{ij} 换成 $D_{ij}(i,j=1,2)$ 是成立的。

$Pf=f-P_{x_1}f-P_{x_2}f-P_{x_1\cap x_2}f$，但 $P_{x_1}f=\hat{\theta}_1u_1\oplus\hat{\Delta}_1u_1\oplus\tilde{\theta}_1v_1\oplus\tilde{\Delta}_1v_1, P_{x_2}=\hat{\theta}_2u_2\oplus\tilde{\theta}_2v_2\oplus\hat{\Delta}_2v_2\oplus\tilde{\Delta}_2v_2, P_{x_1\cap x_2}f=\tilde{\theta}_1\hat{\theta}_1u_0\oplus\hat{\theta}_2\tilde{\Delta}_2u_0\oplus\hat{\theta}_1\tilde{\Delta}_2u_0\oplus\tilde{\Delta}_1\tilde{\Delta}_2u_0$，其中 u_1,v_2,v_1,v_2,u_0 待定。要证明（7.4），

我们只须验证（7.4）中的 u_1,u_2,v_1,v_2,u_0 确实满足上面三式。这可以直接计算得到。证毕。

命题1.8 $ML_{11}^{*}=K$ 的充分且必要条件为，$T_1^{*n}\to 0, T_2^{*n}\to 0$，$(n\to\infty)$，此时

$$WKW^{-1}=L^2\otimes L^2\otimes D_{11},$$

$$WK^{++}W^{-1}=H^2\otimes H^2\otimes D_{11},$$

$$WHW^{-1}=K^{++}\ominus(\theta_1 H^2\otimes H^2\otimes D_{01}+\theta_2 H^2\otimes H^2\otimes D_{10}),$$

$Pu=u-(\theta_1 u_1+\theta_2 u_2)$，其中 u_1,u_2 满足（7.4）条件。

命题1.9 $T=(T_1,T_2)$ 是完全非酉的重交换的压缩算子组，则存在映射 $\Phi: H^\infty(T^2)\to\mathscr{A}_T$，其中 $\mathscr{A}_T$ 为 T 生成的弱 * 闭代数，且满足

（1）若 $f\equiv 1$，则 $\Phi(f)=I$；$f(z)=z_j$，则 $\Phi(f)=T_j, j=1,2$；

（2）$\|\Phi(f)\|\leqslant\|f\|_\infty$；

（3）$\Phi(f)=P_H f(U)|_H$，其中 $f(U)=\int f(e^{it})dE_t$，其中 E_t 是 T 的酉扩张 U 的谱测度；

（4）Φ 是 (H^∞,ω^*) 到 $(\mathscr{A}_T,\omega^*)$ 的连续映照；

（5）当 Φ 是等距时，Φ 是 (H^∞,ω^*) 到 $(\mathscr{A}_T,\omega^*)$ 的同胚映照。

由于命题1.8与命题1.9在已证命题的帮助下，证明方法与 $n=1$ 情况类似，故其证明略去。

§2 联合谱与 $A_{\aleph_0}$ 代数

我们知道，$L(H)$ 可以看作 $c_1(H)$（迹类算子）的对偶空间，而在 * 拓扑下闭的 $L(H)$ 的子代数称为对偶代数。当 M 为对偶代数时，记 ${}^\perp M=\{K;\ K\in c_1(H)$，对任意 $T\in M, \mathrm{tr}(KT)=0\}$，$Q_M=c_1(H)/{}^\perp M$，则 $Q_M^*=M$，（参见［82］）。

若 M 是对偶代数，任意 $[L_{ij}]\subset Q_M$，$i,j=1,2,\cdots$，其中 L_{ij}

$\in c_1(H)$，若有 $x_i, y_i \in H, i, j=1,2,\cdots$，使得$[L_{ij}]=[x_i \otimes y_j]$，其 $x \otimes y$ 为一秩算子：$(x \otimes y)z=\langle z, y\rangle x$。

我们将证明若 $T=(T_1,\cdots,T_n)\in(BCP)_\theta$,$0\leqslant\theta<1$，T 生成的对偶代数 $\mathscr{A}_T$是$\mathscr{A}_{\aleph_0}$ 代数，其中$(BCP)_\theta$ 是这样定义的：

若 K 是 Polydisc $D^n=D\times\cdots\times D$的子集，对任意 $f\in H^\infty(T^n)$，有$\|f\|_\infty=\sup\limits_{z\in K}|\hat{f}(z)|$，其中$\hat{f}$ 是f在 D^n 中的解析延拓，则称 K 控制了T^n。

记 $K_\theta=\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n);\ \inf\sigma_e(T_1^*-\overline{\lambda_1})^{f(1)}(T_1-\lambda_1)^{f(1)},\cdots,(T_n-\lambda_n)^{f(n)}(T_n^*-\lambda_n)^{f(n)})\leqslant\theta$，$f$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到$\{1,*\}$的映射$\}$。若 K_θ 控制了 T^n，则称 $T\in(BCP)_\theta$。

由于命题1.9，我们可以把 T 生成的对偶代数的命题变为 PolydiscD^n 上的 H^∞，L^1 和 $L^1/_{\perp H^\infty}$的命题。由于多复变与单复变的差别，证明比较复杂。我们只证 $n=2$ 的情况。

引理 2.1 设 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in D^2$，记 $T_j(\lambda_j)=(T_j-\lambda_j)(1-\overline{\lambda_j}T_j)^{-1}$，$j=1,2$ 则

$$S_p(T_1^*(\lambda_1)T_1(\lambda_1),T_2^*(\lambda_2)T_2(\lambda_2);H)\cap D^2$$
$$=S_p(\theta_1^*(\lambda_1)\theta_1(\lambda_1),\theta_2^*(\lambda_2)\theta_2(\lambda_2);D_{00})\cap D^2,$$
$$S_{p_e}(T_1^*(\lambda_1)T_1(\lambda_1),T_2^*(\lambda_2)T_2(\lambda_2);H)\cap D^2$$
$$=S_{p_e}(\theta_1^*(\lambda_1)\theta_1(\lambda_1),\theta_2^*(\lambda_2)\theta_2(\lambda_2);D_{00})\cap D^2。$$

证 若 $\lambda=(0,0)$，则

$(T_1^*(0)T_1(0)|_{D_{00}},T_2^*(0)T_2(0)|_{D_{00}})=(\theta_1^*(0)\theta_1(0)|_{D_{00}},\theta_2^*(0)\theta_2(0)|_{D_{00}})$，但$H=D_{00}\oplus(D_1\cap D_2^\perp)\oplus(D_1^\perp\cap D_2)\oplus(D_1^\perp\cap D_2^\perp)$，其中 $D_i=\overline{(1-T_i^*T_i)H}$，$i=1,2$，且每个直和因子都是$T_1^*T_1,T_2^*T_2$的约化子空间。在 $D_1^\perp$ 上，$T_1^*T_1=I$，在 $D_2^\perp$ 上 $T_2^*T_2=I$。这样由联合谱和联合本质谱的投影性质得

$$z\in S_p(T_1^*(0)T_1(0),T_2^*(0)T_2(0);H)\cap D^2$$
$$\Leftrightarrow z\in S_p(\theta_1^*(0)\theta_1(0),\theta_2^*(0)\theta_2(0);D_{00})\cap D^2,$$

$$z \in Sp_e(T_1^*(0)T_1(0), T_2^*(0)T_2(i); H) \cap D^2$$
$$\Leftrightarrow z \in Sp_e(\theta_1^*(0)\theta_1(0), \theta_2^*(0)\theta_2(0); D_{00}) \cap D^2。$$

当$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in D^2$时，$T_j(\lambda)$的特征函数为$\theta_j\left(\frac{u_j+\lambda_j}{1+\lambda_j u_j}\right)$，当$\mu_j=0$时正好是$\theta_j(\lambda_j)$，$j=1,2$。这样利用已证结论可知，(1.1)与(1.2)式成立。证毕。

设$f=u_{00}\oplus u_{01}\oplus u_{10}\oplus u_{11}\in K$，$g=\nu_{00}\oplus\nu_{01}\oplus\nu_{10}\oplus\nu_{11}\in K$，令$(f\cdot g^*)(e^{it})=\langle u_{11}(e^{it}),\nu_{11}(e^{it})\rangle+\langle u_{01}(e^{it}),\nu_{01}(e^{it})\rangle+\langle u_{10}(e^{it}),\nu_{10}(e^{it})\rangle+\langle u_{00}(e^{it}),\nu_{00}(e^{it})\rangle$，则$f\cdot g^*\in L^1(T^2)$。

若$\mu_j\in D$，令$P_{\mu_j}=(1-|\mu_j|^2)^{\frac{1}{2}}(|1-\bar{\mu}_j e^{it_j}|)^{-1}$，$j=1,2$，$P_\mu=P_{\mu_1}P_{\mu_2}$；

若$a\in D_{11}$，定义$\mu\circ a=P_H(P_\mu a\oplus o\oplus o\oplus o)$，则经计算得

$$\mu\circ a=(P_\mu a-\theta_1 w_1-\theta_2 w_2+\theta_1\theta_2 w)\oplus(-\Delta_1 w_1+\Delta_1\theta_2 w)\oplus(-\Delta_2 w_2+\Delta_2\theta_1 w)\oplus\Delta_1\Delta_2 w,$$

其中 $w_j=\frac{1}{2\pi}\int\theta_j^* P_\mu\circ a\,dt_j=P_\mu\hat{\theta}_j^*(\mu_j)a$（$\hat{\theta}_j$为$\theta_j$的解析延拓）$j=1,2$。

$w=P_\mu\ \hat{\theta}_1^*(\mu_1)\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a$。

这样

$$(\mu\circ a)\cdot(\mu\circ a)^*(e^{it})$$
$$=\|P_\mu a-\theta_1 P_\mu\hat{\theta}_1^*(\mu_1)a-\theta_2 P_\mu\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a-\theta_1\theta_2 P_\mu\hat{\theta}_1^*\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|_{D_{11}}^2+$$
$$\|-\Delta_1 P_\mu Q_1^*(\mu_1)a+\Delta_1\theta_2 P_\mu\hat{\theta}_1(\mu_1)\hat{\theta}_2(\mu_2)a\|_{D_{10}}^2+\|-\Delta_2 P_\mu\theta_2^*(\mu_2)a$$
$$+\Delta_2\theta_1 P_\mu\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|_{D_{01}}^2+\|\Delta_1\Delta_2 P_\mu\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|_{D_{00}}^2。$$

上式计算比较复杂，但上边四边可依次等于

$$\|(P_{\mu_1}-\theta_1 P_{\mu_1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1))(P_{\mu_2}-\theta_2 P_{\mu_2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2))a\|^2 \qquad (A)$$

$$\|-\Delta_1 P_{\mu_1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)(P_{\mu_2}-\theta_2 P_{\mu_2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|^2 \qquad (B)$$

$$\|-\Delta_2 P_{\mu_2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)(P_{\mu_1}-\theta_1 P_{\mu_1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)a\|^2 \qquad (C)$$

$$\|\Delta_1 P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\Delta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|^2 \qquad (D)$$

$(A)+(B)$

$$=\|P_{\mu 1}(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|^2-\langle P_{\mu 1}(P_{\mu 2}-\hat{\theta}_2 P_{\mu 2}\theta_2^*(\mu_2)a,\theta_1 P_{\mu 1}$$

$$\cdot\hat{\theta}_1^*(\mu_1)(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2))a\rangle-\langle\theta_1 P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)(P_{\mu 2}$$

$$-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2))a,\ P_{\mu 1}(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2))a\rangle$$

$$+\|P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|^2,$$

后二式之和记为 y_1，

$$y_1=-\langle P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a,\ \theta_1^* P_{\mu 1}(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}$$

$$\cdot\hat{\theta}_2^*(\mu_2))a-P_{\mu 2}\hat{\theta}_1^*(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\rangle$$

$$=-\langle P_{\mu 1}\hat{\theta}_1(\mu_1)(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a,\ (1-\theta_1)(P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)$$

$$(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\rangle,$$

若记 Q_1 是 $L^2\otimes L^2\otimes D_{11}$ 中子空间 $H^2\otimes L^2\otimes D_{11}$ 的投影。y_1 可以简记为 $\langle h_1,(1-Q_1)h_2\rangle$。

当 $f\in H^\infty(T^2)$ 时

$$\int f y_1 dt=\int f\langle h_1,(1-Q_1)h_2\rangle dt=\int\langle fh_1,(1-Q_1)h_2\rangle dt,$$

但 $fh_1\in H^2\otimes L^2\otimes D_{11}$，故上式为零，即 $y_1\in{}^\perp(H^\infty)$。

$(C)+(D)$

$$=\|P_{\mu 1}\Delta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|^2-\langle P_{\mu 1}\Delta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a,\theta_1 P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\Delta_2 P_{\mu 2}$$

$$\cdot\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\rangle-\langle\theta_1 P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\Delta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a,P_{\mu 1}\Delta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\rangle+$$

$$\|\Delta_1 P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\Delta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|^2,$$

后二式记为 y_2，亦可证 $y_2\in{}^\perp(H^\infty)$。

$(A)+(B)$与$(C)+(D)$ 中的第二式相加等于

$$\langle P_{\mu 1}(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a,\ \theta_1 P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)(P_{\mu 2}-\theta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\rangle$$

$$+\langle P_{\mu 1}\Delta_1 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a,\theta_1 P_{\mu 1}\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\Delta_2 P_{\mu 2}\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\rangle$$

$$=\langle P_\mu a,\theta_1 P_\mu\theta_1^*(\mu_1)a\rangle-\langle P_\mu a,\theta_1\theta_2 P_\mu\ \hat{\theta}_1^*(\mu_1)\ \hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\rangle-$$

$\langle\theta_2 P_\mu\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a,\theta_1 P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)a\rangle+\langle\theta_2 P_\mu\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a,\theta_1\theta_2 P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)$

$\cdot\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\rangle+\langle P_\mu\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a,\theta_1 P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\rangle-\langle\theta_2^*\theta_2 P_\mu$

$\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a,\theta_1 P_\mu\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)a\rangle$,

上式第四、六项之和为零，而第三、五项之和为

$\langle P_\mu\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a,\ \theta_1 P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a-\theta_1\theta_2^* P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\rangle$,

由于 $\theta_2^* P_\mu a-P_{\mu 2}\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a=(1-Q_2)P_{\mu 2}a$，其中 Q_2 是 $L^2\otimes L^2\otimes D_{11}$ 中子空间 $L^2\otimes H^2\otimes D_{11}$ 的投影，故同以上证明一样可知第三项和第五项之和在 $^\perp(H^\infty)$ 中。于是

$$(\mu\circ a)\cdot(\mu\circ a)^*-|P_\mu|^2$$

$$=\langle P_\mu a,\theta_1 P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)a\rangle+\langle P_\mu a,\theta_2 P_\mu\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\rangle-\langle P_\mu a,$$

$$\theta_1\theta_2 P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\rangle+z$$

$$=\langle P_\mu a,(Q_1+Q_2-Q_1Q_2)P_\mu a\rangle+z,$$

其中 $z\in{}^\perp(H^\infty)$

$$\|[(\mu\circ a)\cdot(\mu\circ a)^*-|P_\mu|^2]\|_{L^1/\perp(H^\infty)}$$
$$=\int\langle P_\mu a,(Q_1+Q_2-Q_1Q_2)P_\mu a\rangle dt$$
$$=\|(Q_1+Q_2-Q_1Q_2P_\mu a\|$$
$$\leqslant 1,$$

最后的不等号是由于 $Q_1+Q_2-Q_1Q_2$ 是 $H^2\otimes H^2\otimes D_{11}$ 的投影。

$$\int(\langle P_\mu a,(Q_1+Q_2-Q_1Q_2)P_\mu a\rangle+\langle P_\mu a,\theta_2 P_\mu\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\rangle-\langle P_\mu a,$$

$$\theta_1\theta_2 P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\rangle)dt$$

$$=\|P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)a\|^2+\|P_\mu\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\|^2-\|P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\|^2$$

$$\leqslant(\|P_\mu\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)a\|^2+\|P_\mu\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\|^2,$$

于是我们得到

$$\|[(\mu\circ a)^*\cdot(\mu\circ a)-P_\mu]\|_{L^1/\perp(H^\infty)}\leqslant(\|\widehat{\theta_1^*}(\mu_1)a\|^2+\|\widehat{\theta_2^*}(\mu_2)a\|^2$$

对任意 $a\in D_{01},D_{10},D_{00}$，记

$$\mu\triangle a=P_H e^{-it_1}\overline{P_{\mu 1}}P_{\mu 2}(\theta_1 a\oplus\Delta_1 a\oplus 0\oplus 0),$$

$$\mu\Box a=P_H e^{-it_2}\overline{P_{\mu 2}}P_{\mu 1}(\theta_2 a\oplus c\oplus\Delta_2 a\oplus 0),$$

$$\mu\# a=P_H e^{-it_1}e^{-it_2}\overline{P_{\mu 1}}\,\overline{P_{\mu 2}}\ (\theta_1\theta_2 a\oplus\theta_2\Delta_1 a\oplus\theta_1\Delta_2 a\oplus\Delta_1\Delta_2 a)。$$

经过计算亦可得到相应的不等号。因此我们有

引理2.2 对 $a\in D_{11}$，$b\in D_{01}$，$c\in D_{10}$，$d\in D_{00}$，

$$\|[(\mu\circ a)(\mu\circ a)^*-P_\mu^2]\|_{L^1/\perp(H^\infty)}\leqslant(\|\hat{\theta}_1^*(\mu_1)a\|^2+\|\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|[(\mu\Delta b)\cdot(\mu\Delta b)^*-P_\mu^2]\|_{L^1/\perp(H^\infty)}\leqslant(\|\hat{\theta}_1^*(\mu_1)b\|^2+\|\hat{\theta}_2(\mu_2)a\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|[(\mu\Box c)\cdot(\mu\Box c)^*-P_{\mu 2}]\|_{L^1\perp/(H^\infty)}\leqslant(\|\hat{\theta}_1(\mu_1)c\|^2+\|\hat{\theta}_2^*(\mu_2)c\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|(\mu\# d)\cdot(\mu\# d)^*-P_\mu^2]\|_{L^1/\perp(H^\infty)}\leqslant(\|\hat{\theta}_1(\mu_1)d\|^2+\|\hat{\theta}_2(\mu_2)d\|^2)^{\frac{1}{2}}。$$

引理2.3 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{d_n\}$ 分别是 D_{11}，D_{01}，D_{10}，D_{00} 的就范正交基，则对任意 $z\in H$，

$$\|(\mu\cdot a_n)\cdot z\|_{L^1}+\|z\cdot(\mu\cdot a_n)\|_{L^1}\to 0,$$

$$\|(\mu\Delta b_n)\cdot z\|_{L^1}+\|z\cdot(\mu\Delta b_n)\|_{L^1}\to 0,$$

$$\|(\mu\Box c_n)\cdot z\|_{L^1}+\|z\cdot(\mu\Box c_n)\|_{L^1}\to 0,$$

$$\|(\mu\# d_n)\cdot z\|_{L^1}+\|z\cdot(\mu\# d_n)\|_{L^1}\to 0。$$

证 只证第一个结论。

设 $z=u_{11}\oplus u_{01}\oplus u_{10}\oplus u_{00}$，则

$$((u\cdot a_n)\cdot z)(e^{it})$$

$$=P_\mu(e^{it})[\langle a_n,u_{11}(e^{it})\rangle-\langle\theta_1\hat{\theta}_1^*(\mu_1)a_n,\mu_{11}(e^{it})\rangle-$$

$$\langle\theta_2\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a_n,u_{11}(e^{it})\rangle+\langle\theta_1\theta_2\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a_n,u_{11}(e^{it})\rangle$$

$$-\langle\Delta_1\hat{\theta}_1(\mu_1)a_n,\ u_{01}(e^{it})\rangle+\langle\Delta_1\theta_1\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a_n,$$

$u_{01}(e^{it})\rangle - \langle \Delta_2 \hat{\theta}_2(\mu_2)a_n, u_{10}(e^{it})\rangle + \langle \Delta_2\theta_1 \hat{\theta}_2^*(\mu_2)\hat{\theta}_1^*(\mu_1)a_n,$

$u_{10}(e^{it})\rangle + \langle \Delta_1\Delta_2\hat{\theta}_1^*(\mu_1)\hat{\theta}_2^*(\mu_2)a_n, u_{00}(e^{it})\rangle$。

只须证明每一项都趋于零。但等式右边的每一项都可以表示为 $\langle a_n, f(e^{it})\rangle$ 的形式。由于 a_n 是正交系，故对每一个固定的 e^{it}，$\langle a_n, f(e^{it})\rangle \to 0$。再根据控制收敛定理立即可得。证毕。

引理2.4 $T=(T_1,T_2)\in(BCP)_\theta, 0\leqslant\theta<1$，则对任意 $\mu\in K_\theta$，$\varepsilon>0$，必有 $x_n\in L^1, n=1,2,\cdots$，使得

$$\|[x_n\cdot x_n^* - P_\mu^2]\|_{L^1/L_0^1(H^\infty)}\leqslant\theta+\varepsilon。$$

证　由定义 K_θ 控制 T^2。设 $\lambda\in K_\theta$，由多个算子的谱映照定理，必有以下四式之一满足

$$\inf\{|z|; z\in Sp_e((T_1^*-\lambda_1)(T_1-\lambda_1)+(T_2^*-\overline{\lambda_2})(T_2-\lambda_2))\}\leqslant\theta,$$

$$\inf\{|z|; z\in Sp_e((T_1^*-\lambda_1)(T_1-\lambda_1)+(T_2-\lambda_2)(T_2^*-\overline{\lambda_2}))\}\leqslant\theta,$$

$$\inf\{|z|; z\in Sp_e((T_1-\lambda_1)(T_1^*-\overline{\lambda_1})+(T_2^*-\overline{\lambda_2})(T_2-\lambda_2))\}\leqslant\theta,$$

$$\inf\{|z|; z\in Sp_e((T_1-\lambda_1)(T_1^*-\overline{\lambda_1})+(T_2-\lambda_2)(T_2^*-\overline{\lambda_2}))\}\leqslant\theta。$$

不妨设 λ 满足第一式。再由引理2.1，

$$\inf\{|z|; z\in Sp_e(\theta_1^*(\lambda_1)\theta_1(u)+\theta_2^*(\lambda_2)\theta_2(\lambda_2); D_{00})\leqslant\theta。$$

因此对任意 $\varepsilon>0$，必有 $\alpha\in Sp_e((\theta_1^*(\lambda_1)\theta_1(\lambda_1)+\theta_2^*(\lambda_2)\theta_2(\lambda))^{\frac{1}{2}}, D_{00})$，且 $\alpha^2<\theta+\varepsilon$，以及 $\{a_n\}$ 是 D_{00} 中的就范正交基，使得

$$(\hat{\theta}_1^*(\lambda_1)\hat{\theta}_1(\lambda_1)+\hat{\theta}_2^*(\lambda_2)\theta_2(\lambda_2)-\alpha^2)a_n\to 0\quad(n\to\infty),$$

这样便得到

$$\|\hat{\theta}_1(\lambda_1)a_n\|^2+\|\hat{\theta}_2(\lambda_2)a_n\|^2\to\alpha^2,\quad(n\to\infty)。$$

故可不妨假定

$$(\|\hat{\theta}_1(\lambda_1)a_n\|^2+\|\hat{\theta}_2(\lambda_2)a_n\|^2)^{\frac{1}{2}}<\theta+\varepsilon,$$

再由引理2.2，令 $x_n=\mu_0 a_n$，则

$$\|[x_n\cdot x_n^*-P_\mu^2]\|\leqslant\theta+\varepsilon。$$

证毕。

引理2.5 $T=(T_1,T_2)\in(BCP)_\theta$, $0\leqslant\theta<1$，则由命题1.9定义的Φ是等距。

证 设$f\in H^\infty$。取$\{x_n\}$满足引理2.4条件，则对任意$\lambda\in K_\theta$，

$$|\hat{f}(\lambda)-\langle\Phi(f)x_n,x_n\rangle|$$

$$\begin{aligned}&=|\hat{f}(\lambda)-(\Phi(f),x_n\otimes x_n)|\\&=|\langle f,P_\lambda^2\rangle-\langle f,x_n\cdot x_n^*\rangle|\\&=|\langle f,P_\lambda^2-x_n\cdot x_n^*\rangle|\\&\leqslant(\theta+\varepsilon)\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

这样 $|f(\lambda)|-|\langle\Phi(f)x_n,x_n\rangle|\leqslant(\theta+\varepsilon)\|f\|_\infty$，

但K_θ控制了T^2，因此必有

$$\|f\|_\infty-(\theta+\varepsilon)\|f\|_\infty\leqslant\|\Phi(f)\|。$$

用f^n代替f可以得到

$$(1-\theta-\varepsilon)\|f\|_\infty^n\leqslant\|\Phi(f)\|^n,$$

开根n，令$n\to\infty$得$\|f\|_\infty\leqslant\|\Phi(f)\|$。又由命题1.9中(2)，得$\|f\|_\infty=\|\Phi(f)\|$，即$\Phi$是等距。证毕。

设$M\subset L(H)$是对偶代数。$\theta>0$，记

$X_Q(M)=\{[L];[L]\in Q_M$，且有$\{x_i\}_{i=1}^\infty,\{y_i\}_{i=1}^\infty\subset H$，$\|x_i\|\leqslant1$，$\|y_i\|\leqslant1$，使$\limsup\|[x_i\otimes y_i]-[L]\|\leqslant\theta$且对任何$z$，

$\|[x_i\otimes z]\|+\|[z\otimes x_i]\|+\|[y_i\otimes z]\|+\|[z\otimes y_i]\|\to0\}$。

如果$\overline{\text{aco}}\,X_\theta(M)\supset B_{0,r}$，其中$B_{0,r}=\{[L];[L]\in Q_M,\|[L]\|\leqslant r\}$，则称$M$具有$X_{\theta,r}$性质（参见[82]）。

推论2.6 $T=(T_1,T_2)\in(BCP)_\theta$，$0\leqslant\theta<1$，则$\mathscr{A}_T$具有$X^\theta{}_{+\varepsilon,1}$性质。

证 当$\mu\in K_\theta$时，不妨设

$$\inf\{|z|;z\in S_{P_e}(T_1^*(\mu_1)T_1(\mu_1)+T_2^*(\mu_2)T_2(\mu_2))\}\leqslant\theta,$$

则由引理2.2，存在$x_n=\mu\circ a_n$，使得

$$\|[x_n\cdot x_n^*-P_\mu^2]\|\leqslant\theta+\varepsilon,$$

又由引理2.3，对任意 $z\in L^1$，

$$\|x_n\cdot z\|+\|z\cdot x_n\|\to 0,$$

但 K_θ 控制了 T^2，于是必有 $\overline{aco}\{[P_\mu^2],\ \mu\in K_\theta\}\supset B_{0,1}$，其中 $B_{0,1}$ 是 $L^1/{}^\perp(H^\infty)$ 中的闭单位球。由引理2.5，Φ 是等距，再由命题1.9，Φ 是 H^∞ 到 $\mathscr{A}_T$ 的 ω^* 同胚，因此 Φ 的共轭映射 φ：$Q\mathscr{A}_T\to L^1$ 是双射等距。设 $\phi(c_\mu)=P_\mu^2$。注意到 $\phi(x\otimes y)=x\cdot y$，于是 $\|[x_n\cdot x_n^*]-c_\mu]\leqslant\theta+\varepsilon$，且对任意 $z\in L^1$，$\|x_n\otimes z\|\to 0$ 和 $\{[c_\mu];\ \mu\in K_\theta\}\supset B_{0,1}$ 这里 $B_{0,1}$ 是 $Q\mathscr{A}_T$ 中的闭单位球，即 $\mathscr{A}_T$ 具有 $X_{\theta+\varepsilon,1}$ 性质。证毕。

定理2.7 $T=(T_1,T_2)\in(BCP)_\theta,0\leqslant\theta<1$，则 T 生成的对偶代数 $\mathscr{A}_T$ 是 $\mathscr{A}_{\aleph_0}$ 代数。

证 由推论2.6，$\mathscr{A}_T$ 具有 $X_{\theta+\varepsilon,1}$ 性质，再由 [82] 定理3.7，$\mathscr{A}_T$ 具有 $\mathscr{A}_{\aleph_0}$ 性质，又由引理2.5，$\mathscr{A}_T$ 具有 A 性质，即 $\mathscr{A}_T$ 是 $\mathscr{A}_{\aleph_0}$ 代数。证毕。

由单个算子生成的对偶代数是 $A_{\aleph_0}$ 代数时，此算子必有丰富的不变子空间。多个算子的情况亦是如此。

引理2.8 $T=(T_1,T_2)$ 是重交换的压缩算子组，$A=(A_1,A_2)$ 是任意的交换的压缩算子组，$\{e_i\}$ 是 H 的完备的就范正交基，则必有 $M,N\in\text{Lat}T,M\supset N$，和 1-1 的闭算子 X：$D(X)\to M\ominus N$，使得

(a) $\overline{D(X)}=H$，$D(X)\supset\{e_i\}$，$\text{Im}X=M\ominus N$；

(b) $A_jD(X)\subset D(X)$，$T_{jM\ominus N}Xz=XA_jz$ 对任意 $z\in D(X)$ 成立，$j=1,2$。

证明 $\phi_A[e_i\otimes e_j]\in L^1/{}^\perp(H^\infty)$，由于 ϕ_T 是到上的等距，所以存在 $[L_{ij}]\in Q\mathscr{A}_T$，使 $\phi_A[e_i\otimes e_i]=\phi_T[L_{ij}]$。但 $\mathscr{A}_T$ 有 $\mathscr{A}_{\aleph_0}$ 性质，必有 $x_i,y_i\in H$，使 $[L_{ij}]=[x_i\otimes y_i]$，$i,j=1,2,\cdots$。这样 $\langle A_1^{k_1}A_2^{k_2}e_i,e_j\rangle=\text{Tr}(A_1^{k_1}A_2^{k_2}e_i\otimes e_j)=\langle z_1^{k_1}z_2^{k_2},\phi_A[e_i\otimes e_j]\rangle$

$=\langle z_1^{k_1}z_2^{k_2},\phi_T[x_i\otimes y_i]\rangle=\langle T_1^{k_1}T_2^{k_2}x_i,y_i\rangle$。

取 $M=\overline{\text{span}\{T_1^{k_1}T_2^{k_2}x_i; k\geqslant 0, k_2\geqslant 0, i=1\}}$,

$M_*=\overline{\text{span}\{T_1^{*k_1}T_2^{*k_2}y_i; k_1\geqslant 0, k_2\geqslant 0, i\geqslant 1\}}$,

$N=M\cap M_*^{\perp}$,

则 M, $N\in \text{Lat}T$, $M\supset N$。记 $x_i=z_i+w_i$,其中 $z_i\in M\ominus N, w_i\in N$,则 $\langle A_1^{k_1}A_2^{k_2}e_i, e_j\rangle=\langle T_1^{k_1}T_2^{k_2}x_i, y_j\rangle=\langle T_1^{k_1}T_2^{k_2}z_i y_j\rangle$,即得到$[x_i\otimes y_i]=[z_i\otimes y_i]$ 记$\widetilde{T}_j=T_{jM\ominus N}$, $j=1,2$,则 $T_1^{k_1}T_2^{k_2}z_i=\widetilde{T}_1^{k_1}\widetilde{T}_2^{k_2}z_i+v_{ik}$,其中 $v_{ik}\in N$。这样$\langle A_1^{k_1}A_2^{k_2}e_i, e_j\rangle=\langle \widetilde{T}_1^{k_1}\widetilde{T}_2^{k_2}z_i, y_j\rangle$。

定义 $X_0: P_0(A)e_0+\cdots+P_n(A)e_n\to P_0(\widetilde{T})z_0+\cdots+P_n(\widetilde{T})z_n$,其中 P_j 是二元多项式。易验证 X_0 是定义好的且是可闭算子。记 X 为 X_0 的闭扩张。验证知 X 是 1-1 的且满足(a)、(b)。证毕。

引理2.9 $T=(T_1, T_2)$ 是重交换的压缩算子组,且 $\mathscr{A}_T$ 是 $\mathscr{A}_{\aleph_0}$ 代数。$\{(\lambda_{k1}, \lambda_{k2})\}_{k=1}^{\infty}$是 D^2 中的任一序列,则必有 $M, N\in \text{Lat}T$,使 $T_{M\ominus N}$ 酉等价于 $\text{diag}(\lambda_{k1}, \lambda_{k2})$,其中 $\text{diag}(\lambda_{k1}, \lambda_{k2})$表示算子组 $A=(A_1, A_2)$, $A_je_k=\lambda_{kj}, j=1,2$。

证 设 $A=(A_1, A_2)$是对角算子组,使得每个 $\lambda_k=(\lambda_{k1}, \lambda_{k2})$ 是 A 的无限重特征值。由引理2.8,存在$M, N\in\text{Lat}T$,使得 $\widetilde{T}_j Xe_k^{(n)}=XA_je_k^{(n)}=\lambda_{kj}Xe_k^{(n)}$, $j=1,2, n=1, 2, \cdots$。由于 X 是 1-1 的,故$\{Xe_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是线性无关的。把$\{Xe_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$,正交化后得到$\{f_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$,使 $\widetilde{T}_jf_k^{(n)}=\lambda_{kj}f_k^{(n)}, n=1,2,\cdots$。令$K=\overline{\text{Span}\{f_K^{(n)}; n\geqslant 1}$, $k\geqslant 1\}$,则 $K\subset M\ominus N$,这样 $T_{M\ominus N}$ 酉等价于 $\text{diag}(\lambda_{k1}, \lambda_{k2})$。证毕。

定理2.10 $T=(T_1, T_2)$是重交换的压缩算子组,$\mathscr{A}_T$是 $\mathscr{A}_{\aleph}$ 是代数,则 Lat$T$中有子格与 H 的子空间全体 Lat$H$ 存在一一对应关系。

证 取$(\lambda_{k1}, \lambda_{k2})=(0, 0)$,则有$M$、$N\subset H$,使得 $T_{M\ominus N}$ 酉等价于 0。又 $T_jM\subset N$, $j=1,2$,于是 $\dim(M\ominus(T_1M\vee T_2M)\geqslant\dim(M\ominus N=\aleph_0$。设 K 是 $M\ominus N$ 的任一子空间,则必有 $N\oplus K\in\text{Lat}T$。又 $M\ominus N$ 是无限维的,其子空间与 Lat$H$ 是一一对应的,这样 Lat$T$ 含有一个与 Lat$H$ 一一对应的子格。证毕。

第十二章　紧算子组与联合谱的摄动

对于有限维空间上的交换矩阵以及Banach空间上的交换的紧算子组，能否具有如单个算子那样的谱性质？这在本章第一、二节中将作些介绍，我们将看到，一些关于紧算子的基本谱性质（如Riesz-Szuader理论），除极个别外，大都可以推广到几个交换紧算子组。第三节中，我们将证明交换的紧正常算子组可以根据其联合特征值展开，还证明了关于交换正常算子组关于紧摄动的联合Weyl定理。联合谱的摄动是一个较复杂的问题，我们在第四、五节中将给出一些初步的结果。

§1　有限维空间上的交换算子组的联合谱

我们知道，有限维空间上的任何算子，必存在空间的一组基，使算子在这组基下表示为约当标准形。这个算子的谱都是特征值，而且就是其约当标准形对角线上的m个数（计重数，并假定空间是m维的）。

现设H是m维线性空间，$A=(A_1,\cdots,A_n)$是H上的交换算子组，下面我们来看A的Taylor联合谱$S_p(A)$是怎样的，首先我们需要代数学中的一个定理作为引理，这可由中国剩余定理推出（参见[23]）。

引理1.1　任何有限维线性空间上算子T，必可唯一地分解为其半单部分T_s与幂零部分T_N的和，其中T_s与T_N都可表示为T的多项式。

注：这里T_s称为半单是指它相似于对角矩阵算子。

下面我们将看到，有限维空间上的交换矩阵组还是保留了单

个矩阵的部分重要性质，并且一些归纳过程也具体地提供了一项联合谱的递推计算的方法。

引理1.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换矩阵组，则 A 的联合特征值 $\sigma_p(A)$ 非空。

证 $n=1$ 是对的。若 $n-1$ 时也对，则存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 使 $\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}(A_i-\lambda_i)\neq\{0\}$。因为 A_n 与 A_i，$i=1,\cdots,n-1$，交换，所以 $\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}(A_i-\lambda_i)$ 是 A_n 的非零不变子空间，因此存在 λ_n，使 $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}(A_i-\lambda_i)\neq\{0\}$，证毕。

引理1.3 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 H 上的交换矩阵组，$\dim H=m$。则存在 $m+1$ 个 H 的子空间 $\mathscr{U}_0,\cdots,\mathscr{U}_m$ 满足：

(1) $A_i\mathscr{U}_j\subset\mathscr{U}_j, i=1,\cdots,n; j=0,1,\cdots,m$;

(2) $\dim\mathscr{U}_j=j, j=0,\cdots,m$;

(3) $\{0\}=\mathscr{U}_0\subset\mathscr{U}_1\subset\cdots\subset\mathscr{U}_m=H$。

证 $m=0$，1 结论是显然的。

假定结论在 $m-1$ 时已对，考虑 $A^*=(A_1^*,\cdots,A_n^*)$。由引理1.2知，存在非零向量 $x\in H$ 和 $\lambda_1,\cdots,\mathscr{U}\lambda_n\in\mathbf{C}$，使得 $A_i^*x=\lambda_i x$，$i=1,\cdots,n$。设 L 是由 x 张成的子空间的正交补，则 $\dim L=m-1$，并且有 $A_iL\subset L$，$i=1,\cdots,n$。由归纳假设，存在子空间 $\mathscr{U}_0,\cdots,\mathscr{U}_{m-1}$ 使得(1)、(2)、(3)成立，只要将 L 看成 H。现令 $\mathscr{U}_m=H$，就完成了证明。

引理 1.3 告诉我们，交换矩阵组虽然还不能说同时化为约当标准形，但可以同时化为上三角形矩阵。由引理 1.1 中的唯一性，可以立即找出它们半单部分和幂零部分。

定理1.4 设 H 是有限维线性空间，$\dim H=m$。$A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 H 上的交换算子组，则 $S_p(A)=\sigma_p(A)$，并且 $\sigma_p(A)$ 由 C^n 中 m 个数组组成（重数算在内）。

证　设 $A_k=S_k+N_k$ 为 A_k 的半单和幂零分解，$k=1,\cdots,n$。证 $S=(S_1,\cdots,S_n)$ 和 $N=(N_1,\cdots,N_n)$，下面我们分三步证明。

(1)　$Sp(S)=\sigma_p(S)$。

设 $S_i=\begin{pmatrix}\lambda_1^{(i)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^{(i)}\end{pmatrix}, i=1,\cdots,n$。

则显然有 $\mathscr{T}=\{(\lambda_i^{(1)},\cdots,\lambda_i^{(n)})\in C^n;\ i=1,\cdots,m\}\subset\sigma_p(S)\subset Sp(S)$。

反之若 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\overline{\in}\mathscr{T}$，则 $\sum|\lambda_i-\lambda_j^{(i)}|^2\neq 0, j=1,\cdots,m$。

作

$$B_i=\begin{pmatrix}\overline{(\lambda_i-\lambda_1^{(i)})}/\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i-\lambda_1^{(i)}|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{(\lambda_i-\lambda_m^{(i)})}/\sum|\lambda_i-\lambda_m^{(i)}|^2\end{pmatrix}$$

$i=1,\cdots,n$。容易看出 $\sum_{i=1}^{n}B_i(\lambda_i-S_i)=I$，当然更有 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\overline{\in}Sp(S)$。实际上我们已证明了 $Sp(B)=\sigma_p(S)=\mathscr{T}$。

(2)　$Sp(A)\subset Sp(S)$。

我们用归纳法。$m=0,1$ 时显然对。设 $m-1$ 时已对，由引理 1.3，存在 H 的一组基，使 A_i 的矩阵表示为

$$A_i=\begin{pmatrix}a_1^i & & * & \\ & a_2^i & & * \\ & & \ddots & \\ & & & a_m^i\end{pmatrix},\quad i=1,\cdots,n。$$

据第三章引理 4.1，当 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 奇异时，

或者 $(a_1^1,\cdots,a_1^n)$ 奇异，从而 $(a_1^1=a_1^2=\cdots=a_1^n=0$，推得 S 奇异。

$$\text{或者}\left(\begin{pmatrix}a_2^1 & & * \\ & \ddots & \\ & & a_m^1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}a_2^n & & * \\ & \ddots & \\ & & a_m^n\end{pmatrix}\right)\text{奇异。}$$

据归纳假设 $\left(\begin{pmatrix} a_2^1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m^1 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} a_2^n & & * \\ & \ddots & \\ & & a_m^n \end{pmatrix}\right)$ 奇异，推得

S 奇异。

(3) $S_p(S) \subset S_p(A)$。

由(1)知，$S_p(S) = \sigma_p(S)$。不妨设 $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} S_i \neq \{0\}$。由引理1.1知，$S$与$N$都是交换算子组，而且任意$S_i$ 与N_i 也是可以交换的，从而知，非零空间$K = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} S_i$ 是关于 N 不变的。类似引理1.2的证明可知，由于 N 是交换的幂零算子组，因此必存在非零向量 $x \in K$，使 $N_i x = 0$，$i = 1, \cdots n$。这就得到了 $A_i x = 0, i = 1, \cdots, n$。

综合(1)、(2)、(3)，我们完成了全部证明。

§2 Banach 空间上的交换紧算子组

单个紧算子熟知有一套 Riesz-Szuader 理论，它与解积分方程有密切关系。自然我们关心交换的紧算子组有无类似的性质，因此相仿地，我们给出下面定义。

定义2.1 设 $A = (A_1, \cdots, A_n)$为 Banach 空间 X 上的交换紧算子组，下面八个命题称为关于算子组的 Riesz-Szuader 理论。

(1) $S_p(A)$ 的非$(0, \cdots, 0)$谱点必为 A 的联合特征值。

(2) 若记 A 的 Banach 空间共轭算子组为 $A' = (A'_1, \cdots A'_n)$，则有 $S_p(A) = S_p(A')$。

(3) 当 $\lambda \neq (0, \cdots, 0)$ 为 A 的联合特征值时，与 λ 相应的联合特征向量空间必是有限维的。

(4) A 的关于 $\lambda \neq (0, \cdots, 0)$的联合特征向量空间与 A' 关于 λ 的联合特征向量空间的维数相同。

(5) $S_p(A)$的极限点只可能是$(0, \cdots, 0)$。

(6) 若 $\lambda \neq \mu$，则 A 的相应于 λ 的任意的联合特征向量 x 与 A' 的任一相应于 μ 的联合特征向量 f 直交，即 $f(x)=0$。

(7) 若 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq(0,\cdots,0)$，则不定方程 $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-A_i)x_i=y$ 可解的充要条件是 y 与 A' 的任一相应于 λ 的联合特征向量 f 直交，即 $f(y)=0$。

(8) 若 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq(0,\cdots,0)$，则不定方程 $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-A'_i)\varphi_i=f$ 可解的充要条件是 f 与 A 的任何相应于 λ 的联合特征向量 y 直交。

从上面定义中可看到，算子组的 Riesz-Szuder 理论与一类不定方程的解有密切关系。此外，定义中对 A 加了交换性，这是不可少的。从下面的例子可看到这一点。

取二维空间上的二个矩阵：

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则不难验证，$A=(A_1,A_2)$ 没有联合特征值，这将导致 $S_p(A)=\phi$，当然是不合情理的。

我们希望算子组的 Riesz-Szuader 理论成立，但量的变化将可能引起质变，尽管如此，下面结果还是不太令人失望的。

定理2.2 交换算子组的 Riesz-Szuader 理论除了第四条不成立，其余都是成立的。

证 我们先证当 $\lambda\neq(0,\cdots,0)$ 且 λ 为 $S_p(A)$ 的孤立点时，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 必为 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 的联合特征值。

事实上，有 Taylor 谱的分解性质知([113])，存在 A 的两个公共不变子空间 Y 和 Y_1，使得 $X=Y\dotplus Y_1$，$S_p(A|_Y)=\{\lambda\}$，$S_p(A|Y_1)=S_p(A)\backslash\{\lambda\}$。取 λ 的一个非零坐标 λ_i，由 Taylor 谱的投影性质知 $S_p(A_i|Y)=\{\lambda_i\}$。由于 $A_i|Y$ 仍是紧算子且 $\lambda_i\neq0$，必然有 $\dim Y<\infty$。但由上一节的定理1.5知，$S_p(A|Y)=\sigma_p(A|Y)$，

因此有 $\lambda\in\sigma_p(A|Y)\subset\sigma_p(A)$。

现在我们来证明（5）。用归纳法，$n=1$ 时已成立。假定小于 n 时都对。当 n 时，若 λ 为 $S_p(A)$ 的极限点，则存在两两不同的 $\lambda^{(m)}\to\lambda$，$(m\to\infty)$。设 $\lambda^{(m)}=(\lambda_1^{(m)},\cdots,\lambda_n^{(m)})$，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，只可能有三种情况：

(a) $(\lambda_1^{(m)},\cdots\lambda_{n-1}^{(m)})$ 与 $\lambda_n^{(m)}$ 关于 m 都是无限个不同，则 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$ 与 λ_n 分别是 $S_p(A_1,\cdots,A_{n-1})$ 与 $S_p(A_n)$ 的极限点，由归纳假设得 $\lambda=(0,\cdots,0)$。

(b) $(\lambda_1^{(m)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(m)})$ 关于 m 有无限个不同，但存在 M，当 $m>M$ 后，$\lambda_n^{(m)}\equiv\lambda_n$。由归纳假设 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=(0,\cdots,0)$，而且 $m>M$ 后，$(\lambda_1^{(m)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(m)})$ 必是 $S_p(A_1,\cdots,A_{n-1})$ 的孤立点。若 $\lambda_n\neq0$，则 $\{\lambda_1^{(m)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(m)},\lambda_n);\ m>M\}$ 是 $S_p(A)$ 无限个两两不同的孤立点，由前面讨论知它们必是 A 的联合特征值。取相应的联合特征向量 $\{x^m;m>M\}$。一方面由于 $\lambda_n\neq0$，则有 $\dim\{\mathrm{Span}\,(x^m;m>M)\}<\infty$。另一方面至少存在一个 i，使 $\lambda_i^{(m)}$ 有无限个不同，但 A_i 的不同特征向量对应的特征向量是线性无关的，这个矛盾说明只能 $\lambda_n=0$。

(c) $\{\lambda_1^{(m)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(m)}\}$ 只有有限个不同，这时 $\{\lambda_n^{(m)}\}$ 必有无限个不同，下面证明与 (c) 类似，故略。

这样就证得了 (1) 和 (5)。

(7) 必要性 设 $\sum_{i=1}^n(\lambda_i-A_i)x_i=y$ 可解，$f\in\bigcap_{i=1}^n\mathrm{Ker}(\lambda_i-A'_i)$，则 $f(y)=f(\sum(\lambda_i-A_i)x_i)=\sum_{i=1}^n[(\lambda_i-A'_i)f](x_i)=0$。

充分性 首先当 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq(0,\cdots,0)$ 时，我们证明联合值域 $\sum_{i=1}^n\mathrm{Im}(\lambda_i-A_i)$ 闭。事实上只要证明

$$T:(x_1,\cdots,x_n)\to\sum_{i=1}^n(\lambda_i-A_i)x_i$$

的值域闭。由单个算子谱论知这只要证明 T 的共轭算子

$$T': y \to ((\lambda_1 - A'_1)y, \cdots, (\lambda_n - A'_n)y)$$

的值域闭。设 $\lambda_{i_0} \neq 0$，作算子

$$S: (y_1, \cdots, y_n) \to \lambda_{i_0}^{-1} y_{i_0},$$

易知此时 $ST' = I - \lambda_{i_0}^{-1} A_{i_0}$，其中，$I$ 为X'上的恒等算子。由于 $\lambda_{i_0}^{-1} A_{i_0}$是 X' 上的紧算子，因此 T' 是上半 Fredholm 算子，因此$\mathrm{Im}\, T'$闭。

现在我们可以证明充分性。

当 $y \overline{\in} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(\lambda_i - A_i)$，则由刚才的讨论知 $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(\lambda_i - A_i)$是闭子空间，因此存在 $f \in X'$，使 $f(y) \neq 0$，但是由于 $f(\sum \mathrm{Im}(\lambda_i - A_i)) = 0$，因此$f \in \bigcap^{n} \mathrm{Ker}(\lambda_i - A'_i)$。

(8) 必要性。设 $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i A'_i)\varphi_i = f$ 可解，则对于任意的$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\lambda_i - A_i)$，有 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i((\lambda_i - A'_i)x) = 0$。

在证明充分性以前，我们先给个注记。由(7)可知，当 x 是自反空间特别是有限维空间时，(8)是成立的。

现证充分性。设 $f \in x'$，$f(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\lambda_i - A_i) = 0$。

若 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是 A 的正则点，结论显然成立。

现设 $\lambda = (\lambda' \ \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0)$ 为 A 的谱点。在(1)和(5)的证明中已看到，这时存在 A 的两个公共不变子空间 Y 和 Y_1，使得 $X = Y + Y_1$，$S_p(A|Y) \ = \sigma_p(A|Y) = \{\lambda\}$，$S_p(A|r_1) = S_p(A) \backslash \{\lambda\}$。其中 $\dim Y < \infty$。

由于 $\lambda - A$ 限制在 Y_1 上是正则的，因此存在 $g_1, \cdots, g_n \in Y'_1$，使得 $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - (A_i|Y)')g_i = f|Y_1$。将 $g_1, \cdots, g_n$ 延拓成 X 上的泛函 $\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_n$使得$\hat{\varphi}_i(Y) = 0, i = 1, \cdots, n$。则这时有

$x\in Y$ 时，$\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-A'_i)\hat{\varphi}_i(x)=0\right.$；

$$x\in Y_1\text{时},\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-A'_i)\hat{\varphi}_i\right)(x)=\sum(\lambda_i-(A_i|Y_1)')g_i(x)$$
$$=f(x)。\qquad(2.1)$$

又因为 $\dim Y<\infty$ 以及 $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}(\lambda_i-A_i)\subset Y$，我们有

$$f_Y|\left(\bigcap^{\infty}\mathrm{Ker}(\lambda_i-A_i|_Y)\right)=f\left(\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}(\lambda_i-A_i)\right)=0。$$

据上面的注记知，必存在 $h_1,\cdots,h_n\in Y'$，使得

$$\sum((\lambda_i-(A_i|_Y)')h_i=f|_Y。$$

将 h_i 都延拓成 X 上的泛函 $\tilde{\varphi}_i$，使得 $\tilde{\varphi}_i\ (Y_1)=0,i=1,\cdots,n$，则此时有

$$x\in Y\text{时},\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-A'_i)\varphi_i\right)(x)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-(A_i|Y)'h_i)(x)$$
$$=f(x);$$
$$x\in Y_1\text{时},\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-A'_i)\tilde{\varphi}_i)(x)=0。\qquad(2.2)$$

令 $\varphi_i=\hat{\varphi}_i+\tilde{\varphi}_i,i=1,\cdots,n$，则由(2.1)和(2.2)立即知

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-A'_i)\varphi_i=f。$$

(4)不成立的例子。取 $H=C^3$，$A=(A_1,A_2)$ 为 H 上两个交换算子，它们矩阵可表示为

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则

$$A'_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad A'_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

易知此时 $\dim(\mathrm{Ker}A_1\cap\mathrm{Ker}A_2)=1$，$\dim(\mathrm{Ker}A'_1\cap\mathrm{Ker}A'_2)=2$。证毕。

§3 紧正常算子组及联合 Weyl 定理

上节我们已经知道了交换的紧算子组的 Taylor 联合谱为 C_n 中以$(0,\cdots,0)$为唯一可能聚点的可列集，并且其非$(0,\cdots,0)$谱点均为有限重数的联合特征值。现在我们考虑性质更好的算子组——Hilbert 空间上的交换紧正常算子组。

我们知道，Hilbert 空间上的对角矩阵算子组是结构较简单清楚的一列算子组（参见第四章），它的联合谱结构，联合范数等都直接可算出来。我们指出，当每个对角矩阵的对角元素都趋于0时，就成为交换的紧正常算子组，下面我们要证明，事实上每个交换紧算子组都可以在某组基下表示成对角矩阵算子组。

定理3.1 设 H 是 Hilbert 空间，$A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换的紧正常算子组，则 A 可以根据联合特征值进行展开，从而可看成对角算子组。

证　由上节定理2.2知道，

$$S_p(A)=\{(\lambda_1^{(m)},\cdots,\lambda_n^{(m)});m=1,2,\cdots\}\cup\{0,\cdots,0\}$$

其中 $|\lambda_1^{(m)}|^2+\cdots+|\lambda_n^{(m)}|^2\neq 0$，$m=1,2,\cdots$，并且 $\lambda^{(m)}=(\lambda_1^{(m)},\cdots\lambda_n^{(m)})$ 为 A 的联合特征值，对应 $\lambda^{(m)}$ 的联合特征空间是有限维的，设其正交基为 $e_1^m,\cdots,e_{k_m}^m$。由于 A 是正常算子组，易知不同联合特征值对应的联合特征空间是相互正交的，而且若令 P_m 为对应 $\lambda^{(m)}$ 的联合特征空间上的投影，$P_0=I-\sum P_m$，则由于 A 的乘积测度集中在 $S_p(A)$ 上，我们得 $A_iP_m=\lambda_i^{(m)}P_m$，$A_iP_0=0$，$i=1,\cdots,n$。这样对任何 $x\in H$，有 A 的联合特征展开：

$$\begin{cases} A_1x=\sum\limits_{m,k}\lambda_1^{(m)}\langle x,e_k^m\rangle e_k^m \\ A_2x=\sum\limits_{m,k}\lambda_2^{(m)}\langle x,e_k^m\rangle e_k^m \\ \cdots \\ A_nx=\sum\limits_{m,k}\lambda_n^{(m)}\langle x,e_k^m\rangle e_k^m \end{cases}$$

这里 $m=1,2,\cdots;k=1,\cdots,k_m$。

显然正交向量序列$\{e_k^m\}_{m,k}$再加上 P_0H 中的一组正交向量，就得到 H 的一组正交基，在这组基下，$A=(A_1,\cdots,A_n)$ 可表示为对角矩阵算子。证毕。

现在我们利用联合特征展开来证明一个有趣的结果。

定理3.2 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为 Hilbert 空间 H 上的交换紧正常算子组，$\{\lambda^m=(\lambda_1^{(m)},\cdots,\lambda_n^{(m)})\neq(0,\cdots,0)\}$为 A 的一列联合特征值（重数计算在内），若将 $\{\lambda^m\}$ 按模排列，使得 $|\lambda^{(1)}|\geqslant|\lambda^{(2)}|\geqslant\cdots$，则有 $|\lambda^{(1)}|=\|A\|$，

$$|\lambda^{(2)}|=\min_{g_1,g_2\in H}\max\left\{\left(\sum_{i=1}^n\|A_if\|^2\right)^{\frac{1}{2}};f\perp g_1,g_2,\ \|f\|=1,\right\},$$

$\cdots\cdots$

$$|\lambda^{(m+1)}\|=\min_{g_1,\cdots g_m\in H}\max\left\{\left(\sum_{i=1}^n\|A_if\|^2\right)^{\frac{1}{2}};f\perp g_1,\cdots,g_m,\|f\|=1\ ,\right\}$$

$\cdots\cdots$

证 因为 $\{f;f\perp g_1,\cdots,g_m,\|f\|\leqslant1\}$ 是 H 中弱紧集，又 A 是紧算子组，故 max 是有意义的。下面证明中将指出 min 也是有意义的。

因为 A 是交换紧正常，所以 $r_{sp}(A)=\|A\|$，$S_p(A)\setminus\{0\}\subset\sigma_p(A)$，所以立得 $|\lambda^{(1)}|=\|A\|$。

现取一列对应 $\{\lambda^{(m)}\}$ 的规范正交联合特征向量序列 $\{f_m\}$，我们就选 $g_i=f_i$，$i=1,\cdots,m$。则对每个 $f\perp g_1,\cdots,g_m$，利用 A 的联合特征展开，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\|A_i f\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\sum_{j>m}\lambda_i^{(j)}\langle f_j,f\rangle f_j\|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>m}|\lambda_i^{(j)}|^2|\langle f_j,f\rangle|^2$$

$$=\sum_{j>m}|\langle f_j,f\rangle|^2\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i^{(j)}|^2$$

$$\leqslant|\lambda^{(m+1)}|^2\|f\|^2,$$

由此得到$|\lambda^{(m+1)}|\geqslant\min\max\{\cdots\}$。而且看到min是有意义的。

现设$g_1,\cdots,g_m$是H中的任意向量，则存在$f_1,\cdots,f_{m+1}$线性张中的一个单位向量f，使得$f\perp g_1,\cdots,g_m$。这时

$$\sum_{i=1}^{n}\|A_i f\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_i^{(j)}\langle f_j,f\rangle f_j\|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m+1}|\lambda_i^{(j)}|^2|\langle f_j,f\rangle|^2$$

$$=\sum_{j=1}^{m+1}|\langle f_j,f\rangle|^2\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i^{(j)}|^2$$

$$\geqslant\|f\|^2\cdot|\lambda^{(m+1)}|^2=|\lambda^{(m+1)}|^2,$$

所以有$|\lambda^{(m+1)}|\leqslant\min\max\{\cdots\}$。证毕。

对于交换的紧自共轭算子，我们用Reyleigh商来逼近联合特征值，也许为计算方法更感兴趣些。

定理3.3 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$为交换的紧自共轭算子组，将$\sigma_p(A)$从左到右，从大到小按字典法排序：

$$(\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)})\succ(\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_n^{(2)})\succ\cdots$$

其中联合特征值计重数，则有

$$\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)})=\max(W(A)),$$

$$\lambda^{(2)}=(\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_n^{(2)})=\min_{y}\max_{x\perp y}(\langle A_1x,x\rangle,\cdots\langle A_nx,x\rangle)/\|x\|^2,$$

$\cdots\cdots$

$$\lambda^{(k+1)}=(\lambda_1^{(k+1)},\cdots,\lambda_n^{(k+1)})=\min_{y_1,\cdots,y_k}\max_{x\perp y_i;i=1,\cdots,k}(\langle A_1x,x\rangle,\cdots,\langle A_nx,x\rangle)/\|x\|^2,$$

其中max，min也是字典序意义下的。

证 设 $E(\cdot)$ 为 A 的乘积谱测度，$\|x\|=1$，有

$$(\langle A_1x,x\rangle,\cdots,\langle A_nx,x\rangle)=\int_{Sp(A)}(z_1,\cdots,z_n)d\langle E(z)x,x\rangle\to(\lambda_1^{(1)},$$

$\cdots,\lambda_n^{(1)})=\lambda^{(1)}$，因为 A 是紧算子组，所以 $W(A)$ 是 C^n 中紧集，不难得到第一式。余下证明我们略去了，只要注意到 A 的联合特征向量空间必是 A 的公共约化子空间，就不难写出全部证明。证毕。

为了研究一个算子在紧摄动后的谱的变化，人们曾引进 Weyl 谱。关于正常算子，有个著名的 Weyl 定理，就是说一个正常算子的谱去掉孤立的有限重数的特征值后，剩下的谱是紧算子永远摄动不了的。下面我们将这个结果推广到交换的正常算子组。

定义3.4 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是 Hilbert 空间 H 上的交换算子组，$\sigma_{00}(T)$ 为 T 的孤立的有限重数的联合特征值全体，$\sigma_c(T)=S_p(T)\backslash\sigma_{00}(T)$ 称为 T 的联合极限谱。

引理3.5 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为交换的正常算子组，则 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in S_p(A)\backslash\sigma_{00}(A)$ 时，必有一列单位向量 $\{f_m\}$，使得 $f_m\xrightarrow{w}0$，$\|(\lambda_i-A_i)f_m\|\to 0$，$(m\to\infty)$

证 对 λ 的任意邻域 O_λ，必有 $\dim E(O_\lambda)H=\infty$。作收缩到 λ 的一列邻域 $\{\Delta^m\}$，这时可选取一列正交的单位向量 $\{f_m\}$，其中 $f_m\in E(\Delta^m)H$，$m=1,\cdots$。因此这时 $f_m\xrightarrow{w}0$，和 $(A_i-\lambda_i)f_m\to 0$，$(m\to\infty)$，$i=1,\cdots,n$。证毕。

定理3.6 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为交换的正常算子组。记 $\mathscr{K}=\{K=(K_1,\cdots,K_n)$：$K$ 是紧算子组，且 $A+K$ 是交换算子组。则下面等式成立：

$$\sigma_c(A)=\bigcap_{K\in\mathscr{K}}S_p(A+K)。$$

证 设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\overline{\in}\sigma_c(A)$，则存在 λ 的邻域 O_λ，使 $E(O_\lambda)$ 是有限秩算子。令 $K=(K_1,\cdots,K_n)$，$K_i=E(O_\lambda)$，$i=1,\cdots,$

n。则 $K\in\mathscr{K}$，且 $A+K-\lambda$ 是联合下方有界的。又显然 $A+K$ 是交换的正常算子组，故 $\lambda\overline{\in}S_p(A+K)$。

反之，设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma_c(A)$，据引理3.5，有一列单位向量列 $\{f_m\}$，$f_m\xrightarrow{w}0$，$\|(A_i-\lambda_i)f_m\|\to0(m\to\infty)$。对任意 $K=(K_1,\cdots,K_n)\in\mathscr{K}$，必有 $\|K_if_m\|\to0$ $(m\to\infty)i=1,\cdots,n$。于是 $\|(A_i+K_i-\lambda_i)f_m\|\to0$ $(m\to\infty)$ $i=1,\cdots,n$。这样知 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\overline{\in}S_p(A+K)$。证毕。

定义3.8 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为交换正常算子组，K 如定理3.6，则称 $w(A)=\bigcap\limits_{k\in K}S_p(A+K)$ 为 A 的联合 Weyl 谱。

定理3.9 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为交换正常算子组，则 $w(A)=Sp_e(A)=\sigma_c(A)$。

证 定理3.6 已指出 $w(A)=\sigma_c(A)$。现只要证 $S_{pe}(A)=\sigma_c(A)$。这可由以下一列等价关系得到($\pi:L(H)\to L(H)/K$)

$$\lambda\overline{\in}S_{pe}(A)\Longleftrightarrow\pi(\widehat{A)-}\lambda\text{可逆}$$

$$\Longleftrightarrow(\pi(\widehat{A)-}\lambda)^*(\pi(\widehat{A)-\lambda})\text{可逆}$$

$$\Longleftrightarrow\pi\Big(\mathrm{diag}\Big(\sum_{i=1}^{n}(A_i-\lambda_i)^*(A_i-\lambda_i)\Big)\Big)\text{可逆}$$

$$\Longleftrightarrow0\overline{\in}S_p\Big(\sum_{i=1}^{n}(A_i-\lambda_i)^*(A_i-\lambda_i)\Big)\setminus\sigma_{00}\Big(\sum_{i=1}^{n}(A_i-\lambda_i)^*(A_i-\lambda_i)\Big)\text{（单个算子的 Weyl 定理）}$$

$$\Longleftrightarrow\lambda\overline{\in}S_p(A)\setminus\sigma_{00}(A)。$$ 证毕。

§4 混合谱与紧摄动

在第二章中，对于 Banach 空间 X 上的交换算子组 $A=(A_1,\cdots A_n)$，$\sigma_m(A)=S_p(A)\setminus(\sigma_\pi(A)\cup\sigma_\delta(A))$ 定义为 A 的混合谱。本

节将用摄动方法来研究混合谱。

第二章中我们定义了联合谱、联合本质谱和指标，并且还给出了一些正则的或 Fredholm 算子组的特征，为了下面证明的需要，我们再给出以下定理（参见 Vasilescu [117]）注意我们以下用上链来定义复形的）。

定理4.1 设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 为 Hilbert 空间 H 上交换算子组。$E(H,A)=(E^k(H),d^k)$ 是相应的 A 的复形，则存在 Hilbert 空间 $H_0=\bigoplus_{K>0}E^{2k}(H)$ 和 $H_1=\bigoplus_{K>0}E^{2k+1}(H)$ 及 $T_A\in L(H_0,H_1)$ 满足

（1）对一切 k，$\mathrm{Im}d^k$ 闭 $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}T_A$ 闭；

（2）A 是半 Fredholm (Fredholm) $\Longleftrightarrow T_A$ 是半 Fredholm (Fredholm)

（3）A 正则 $\Longleftrightarrow T_A$ 正则。

T_A 的定义为 $T_A(\oplus\xi_{2k})=\oplus(d^{2k}\xi_{2k}+d^{2k+1*}\xi_{2k+2})$ 且有下列关系式：

$$\mathrm{Ker}T_A=\bigoplus_{K>0}(\mathrm{Ker}d^{2k}\ominus\mathrm{Im}d^{2k-1}),$$

$$\mathrm{Im}T_A=\bigoplus_{K>0}(\mathrm{Im}d^{2k}\oplus\mathrm{Im}d^{2k+1*}),$$

$$H_1\ominus\mathrm{Im}T_A=\bigoplus_{K>0}(\mathrm{Ker}d^{2k+1}\ominus\mathrm{Im}d^{2k})。$$

定理4.2 设 $A=(A_1,A_2)$ 是交换算子对，则 $\sigma_m(A)$ 是开集。

证 设 d^0,d' 是对应于 A 的边界算子，则根据 T_A 的定义，$T_A(x\oplus y)=d^0x+d'^*y$。为证 $\sigma_m(A)$ 是开集，只须证明若 $0\in\sigma_m(A)$，则存在 0 的邻域 $V_0\subset C^2$，使对任何 $z\in V_0$，有 $z\in\sigma_m(A)$ 。

设 $0\in\sigma_m(A)$，则由 $\sigma_m(A)$ 的定义及定理 4.1知 $\mathrm{Im}T_A=\mathrm{Im}d^0\oplus\mathrm{Im}d^{1*}$ 闭，$H\ominus\mathrm{Im}T_A=\mathrm{Ker}d^1\ominus\mathrm{Im}d^0\neq\{0\}$。因此 T_A 是半Fredholm 算子。据 Kato [91] 定理 IV5.16，存在 $\varepsilon>0$，当 $\|T_A-T_{A-z}\|=\|T_z\|<\varepsilon$ 时，T_{A-z} 也为半 Fredholm 算子，且 $\dim\mathrm{Ker}\,T_{A-z}\leqslant\dim\mathrm{Ker}\,T_A$，$\mathrm{Ind}\,T_A=\mathrm{Ind}\,T_{A-z}$，于是知当 $\|T_z\|<\varepsilon$ 时，$\mathrm{Ker}\,T_{A-z}=$

$\mathrm{Ker}d^0(A-z)\oplus(H\ominus\mathrm{Im}d^1(A-z))=\{0\}$，$\mathrm{Im}T_{A-z}=\mathrm{Im}d^0(A-z)\oplus\mathrm{Im}d^{1*}(A-z)$闭。$\dim(H_1\ominus\mathrm{Im}\ T_{A-z})=\dim(\mathrm{Ker}d'(A-z)\ominus\mathrm{Im}d^*(A-z))=\dim(H_1\ominus\mathrm{Im}T_A)\neq 0$。这说明$z\in\sigma_m(A)$。因为$T_z$关于$z$是连续的，故存在$\delta>0$，当$\|z\|<\delta$时$\|T_z\|<\varepsilon$。因此，$V_0\subset\sigma_m(A)$，即$\sigma_m(A)$是一个开集。

推论4.3 设$A=(A_1,A_2)\subset L(H)$是交换算子对，则$S_p(A)$的边界$\mathrm{Bd}(S_p(A))\subset\sigma_\pi(A)\bigcup\sigma_\delta(A)$。

证 由于$\sigma_m(A)$是开集，且$\sigma_m(A)\subset S_p(A)$故$\mathrm{Bd}(S_p(A))\bigcap\sigma_m(A)=\phi$，从而有$\mathrm{Bd}(S_p(A))\subset\sigma_\pi(A)\bigcup\sigma_\delta(A)$。证毕。

下面的定理是关于紧摄动的。

定理4.4 设$A=(A_1,A_2)$，$B=(B_1,B_2)\subset L(H)$都是交换算子对，$K_i=B_i-A_i$，$i=1,2$，是紧算子，若$0\in S_p(A)\backslash S_p(B)$，则$0\overline{\in}\sigma_m(A)$。

证 由于$T_B-T_A=T_k$是紧算子，于是$\mathrm{Ind}T_A=\mathrm{Ind}T_B=\dim\mathrm{Ker}\ T_A-\dim(H_1\ominus\mathrm{Im}\ T_A)=0$。但$0\in S_p(A)$，$A$是Fredholm，故$\mathrm{Ker}\ T_A=\mathrm{Ker}\ d^0\oplus(H\ominus\mathrm{Im}\ d')\neq\{0\}$，即$0\in\sigma_\pi(A)\bigcup\sigma_\delta(A)$，$0\overline{\in}\sigma_m(A)$。证毕。

$n\geqslant 3$时，混合谱较复杂，上面两个定理也不成立。

定义4.5 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$是交换算子组。

$\sigma_{m_1}(A)=\{z\in\sigma_m(A);d_{2k}(A-z),k\geqslant 0$都可逆，或者$d_{2k+1}(A-z),k\geqslant 0$都可逆$\}$；

$\sigma_{m_2}(A)=\{z\in\sigma_m(A);$存在$i\geqslant 0$，使$d^i(A-z),d^{i+1}(A-z)$都不可逆$\}$；

σ_{m_1}称为混合Ⅰ型谱，σ_{m_2}称为混合Ⅱ型谱，显然有

$$\sigma_m=\sigma_{m_1}\bigcup\sigma_{m_2},\quad \sigma_{m_1}\bigcap\sigma_{m_2}=\phi。$$

交换算子对只有混合Ⅰ型谱。

定理4.6 $\sigma_{m_1}(A)$是开集。

证　若 $z\in\sigma_{m_1}(A)$，则 $A-z$ 是半 Fredholm，且有 $d^0(A-z)$，$d_n(A-z)$ 可逆，$\text{Ker}\,T_{A-z}=\{0\}$，或者 $H_1\ominus\text{Im}T_{A-z}=\{0\}$。不妨设 $\text{Ker}\,T_{A-z}=\{0\}$。对 T_{A-z}，$d^0(A-z)$，$d^n(A-z)$ 应用 Kato [91] 定理 IV.5.16，由 T_{A-z}，$d^0(A-z)$，$d^n(A-z)$ 关于 z 连续知存在 $\delta>0$，使当 $\|z'-z\|<\delta$ 时，$T_{A-z'}$ 仍为半Fredholm，$d^0(A-z')$，$d^n(A-z')$ 仍可逆，并且 $\dim\,\text{Ker}\,T_{A-z'}\leqslant\dim\text{Ker}T_{A-z'}=0$，$\text{Ind}\,T_{A-z'}=\text{Ind}\,T_{A-z}$，于是得到 $\text{Ker}T_{A-z'}=\{0\}$，$H_1\ominus\text{Im}\,T_{A-z}\neq\{0\}$。因此 $V_0=\{z'\in C^n;\ \|z-z'\|<8\}\subset\sigma_{m_1}(A)$，$\sigma_{m_1}(A)$ 是开集。证毕。

推论4.7　设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换算子组，则有

$$\text{Bd}(S_p(A))\subset\sigma_\pi(A)\cup\sigma_\delta(A)\cup\sigma_{m_1}(A)。$$

定理4.8　设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$，$B=(B_1,\cdots,B_n)$ 是交换算子组，$B_i-A_i=k_i$，$i=1,\cdots,n$，都是紧算子，如果 $0\in S_p(A)\backslash S_p(B)$，则 $0\overline{\in}\sigma_{m_1}(A)$。

证　由于 $T_B-T_A=T_k$ 是紧算子，故 $\text{Ind}T_A=\text{Ind}\,T_B=0$。但是 $0\in S_p(A)$，因此 $\text{Ker}\,T_A=\bigoplus\limits_{K\geqslant 0}(\text{Ker}\,d^{2k}\ominus\text{Im}\,d^{2k-1})\neq\{0\}H_1\ominus\text{Im}T_A$

$=\bigoplus(\text{Ker}\,d^{2k+1}\ominus\text{Im}\,d^{2k})\neq\{0\}$，即 $0\overline{\in}\sigma_{m_1}(A)$。证毕。

§5　有限重联合特征值的稳定性

有限重数的联合特征值在联合谱中也占有一定的地位。因为对于交换紧算子组 $K=(K_1,\cdots K_n)$，由定理 2.2 可知，除去 $(0,\cdots 0)$ 外，$S_p(K)$ 都是有限重特征值。这节的主要目的是讨论有限重特征值的稳定性。

首先对有限维空间上的算子组加以考察，然后将这些结果移植到 Banach 空间上去。

设 A 是有限维空间 X 上的线性变换，$\dim X=N$。A 的特征

多项式 $\det(A-\lambda)=f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$。则 $X=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$。其中 $V_i=\{\xi\in X;(A-\lambda_i)^{r_i}\xi=0\}$。通常称 V_i 为 A 的根子空间，并且 V_i 是 A 的不变子空间。

设 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是 X 上的交换算子组，对每个 A_i，X 有相应的分解 $X=\bigoplus_{k=1}^{s_i}V_k^i$。由于 $A_iA_j=A_jA_i$，因此 $\{V_k^i\}_{i,k}$ 是每个 A_j 的不变子空间。这里 $V_k^i=\{\xi\in X;(A_i-\lambda_k^i)^{r_{ik}}\xi=0\}$

令 $V_{k_1\cdots k_n}=V_{k_1}^1\cap\cdots\cap V_{k_n}^n$，$1\leqslant k_i\leqslant s_i$。

则 $V_{k_1\cdots k_n}$ 是 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 的不变子空间，并且 $X=\bigoplus_{1\leqslant k_i\leqslant s_i}V_{k_1\cdots k_n}$（注意：$V_{k_1\cdots k_n}$ 可能为 $\{0\}$）。

引理5.1 $V_{k_1\cdots k_n}\neq\{0\}$ 的充分必要条件是 $(\lambda_{k_1}^1,\cdots,\lambda_{k_n}^n)$ 是 A 的联合特征值。

证　充分性是显然的，必要性的证明只要利用 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 的交换性。

定义5.2 若 $V_{k_1\cdots k_n}\neq\{0\}$，则称 $V_{k_1\cdots k_n}$ 为 A 的联合特征值 $(\lambda_{k_1}^1,\cdots,\lambda_{k_n}^n)$ 的根子空间。$\dim V_{k_1\cdots k_n}$ 称为 $(\lambda_{k_1}^1,\cdots\lambda_{k_n}^n)$ 的代数重数。

下面所提到的重数都是指代数重数。

对交换算子组 $A=(A_1,\cdots,A_n)$，X 可分解成 A 的根子空间的直和 $X=\oplus V_i$，但若 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 不是交换的，我们前面已看到 A 可能没有联合特征值。

现设 $A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$，$A_i(x)\subset L(X)$，$X$ 是有限维空间，$x\in D_0\subset C$，D_0 是连通开集，对每个 $x\in D_0$，$A(x)$ 是交换算子组，且 $A_i(\cdot)$ 在 D_0 中解析，为方便起见，不妨 $0\in D_0$，$A(0)=A=(A_1,\cdots,A_n)$。

设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是 A 的联合特征值，重数为 $m\leqslant N=\dim X$。取多面体域 $V=U_1\times\cdots\times U_n$，使 U_i 分离 λ_i 与 $S_p(A_i)\backslash\{\lambda\}$。从而 V 仅

包含 A 的联合特征值 λ，$S_p(A)\backslash\{\lambda\}\cap\overline{V}=\phi$。另取一开集 V_1，使 $V\bigcup V_1\supset S_p(A)$，但 $\overline{V_1}\cap\overline{V}=\phi$，于是特征函数 $\chi_V(z)$ 是 $V\cup V_1$ 上解析函数。在 U_i 中取一闭围线 Γ_i，使 λ_i 落在 Γ_i 的内部，$\lambda_i\in\mathrm{int}\Gamma_i$，由于 $A_i(x)$ 解析，故存在 $\delta>0$，当 $|x|<\delta$ 时，$A_i(x)$ 在 Γ_i 上可逆。于是

$$\begin{aligned}\chi_V(A(x))\,\xi&=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int R_{A(x)-z}\chi_V(z)\xi dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\\&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_V R_{A(x)-z}\xi dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\\&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{\Gamma_1}\cdots\int_{\Gamma_n}\prod_{i=1}^n(A_i(x)-z_i)^{-1}\xi dz_1\cdots dz_n。\end{aligned}$$

因此当 $|x|<\delta$ 时，$P(x)=\chi_V(A(x))$ 关于 x 解析。由于 $P(x)$ 是投影算子，故 $\dim P(x)=\dim P(0)$。

根据 Taylor [113]中定理 4.9 的证明知 $S_p(A|_{P(0)X})=\{\lambda\}$ $S_p(A|_{(I-P(0))X})=S_p(A)\backslash\{\lambda\}$。由此可得 $P(0)$ 是 A 关于 λ 的根子空间，$\dim P(0)=m$(P (0)称为 λ 的特征投影）。

总结上面结果得出了

定理5.3 设 $A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$是解析交换算子值函数组，$x\in D_0\subset C$。对 $x_0\in D_0$，λ 是 $A(x_0)$ 的任一联合特征值 $P(x_0)$是 λ 的特征投影。V是分离λ与$S_p(A(x_0))\backslash\{\lambda\}$的多面体域，则存在 $\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$，$x\in D_0$ 时，$\dim P(x)=\dim P(x_0)$，并且 $P(x)$解析。

这个定理说明，当$|x-x_0|<\delta$ 时，$A(x)$在 V 中特征值的总重数与 λ 的重数相等，但我们并不知道 $A(x)$在 V 中的特征值个数究竟是多少。对于单个解析函数（算子值）$T(x)$，Kato [91]中证明了，$T(x)$ 在区域 D_0 中解析，则 $T(x)$ 的特征值的个数除D_0中有限个点外（这种点被称为例外点），不依赖于 x 的变化，而是一个常数 s。对于交换算子组，这个性质同样存在。

定理5.4 设 $A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$ 是区域 D_0 中解析的交换算子值函数组，如果 $D\subset D_0$ 是不含 $A(x)$ 的例外点的单连通区域，则 $A(x)$ 的特征值的个数在 D 中是一常数 s，并且可用在 D 中解析的 s 个单值函数来表示这些特征值（x 称为 $A(x)$ 的例外点，如果 x 是某个 $A_i(x)$ 的例外点）。

证 只须证明对于任何 $x\in D$，存在 x 的邻域 Vx，使对一切 $y\in Vx$，$A(y)$ 特征值的个数等于 $A(x)$ 的特征值的个数。从而由有限复盖定理及 D 的连通性得，$A(x)$ 在 D 中特征值的个数是一常数 s。

设 $x=0\in D$，对 0 证明上述性质。0 不是 $A_i(x)$ 的例外点。

由单个算子的解析稳定性，为 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 的任一特征值 $\mu_i=(\lambda_1^i,\cdots,\lambda_n^i)$ 可取多圆域 $V_i=V_1^i\times\cdots\times V_n^i$，使 V_k^i 分离 λ_k^i 与 $S_p(A_k)\backslash\{\lambda_k^i\}$。对每个 k，存在 $\delta_k^i>0$，当 $|x|<\delta_k^i$ 时，$A_k(x)$ 在 V_k^i 中仅有一个特征值 $\lambda_k^i(x)$；又 $P_i(x)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{V_i}R_{A(x)-z}dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$ 在 $|x|<e_i$ 中连续。取 $\delta_i=\min\{e_i,\delta_1^i,\cdots,\delta_n^i\}$，则当 $|x|<\delta_i$ 时，$\dim P_i(x)=\dim P_i(0)=\mu_i$ 的重数 $\neq 0$。因此根据联合谱的投影性质，$A(x)$ 在 V_i 中只有一个联合特征值，且重数与 μ_i 的重数相同。由于 $A(x)$ 的特征值的总重数为 $N=\dim X$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$，当 $|x|<\delta$ 时，$A(x)$ 的特征值个数等于 $A(0)$ 特征值的个数。

在上面的证明中可以看到，对于 A 的一个特征值 μ_i，当 $|x|<\delta_i$ 时，$A(x)$ 在 V_i 中只有一个联合特征值 $\mu_i(\lambda)=(\lambda_1^i(x),\cdots,\lambda_n^i(x))$。而 $\lambda_k^i(x)$ 根据单个解析算子的性质是解析的，因此在 $x=0$ 的一个邻域中 $A(x)$ 的 s 个联合特征值可由 s 个在此邻域中解析的函数组来表示。由解析函数的唯一性，得到 D 中 $A(x)$ 的特征值可用 s 个解析函数组来表示。

下面讨论连续性和可微性。仍设X是有限维空间。

定义5.5 设 $A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$ 是交换算子值函数组，x 在区域 D_0 中变化，若任给 $A(0)=A$ 的特征值 λ 及 λ 的一个邻域 V_λ，V_λ 分离 λ 与 $S_p(A)\backslash\{\lambda\}$，存在 $\delta>0$，当 $|x|<\delta$ 时，$A(x)$ 在 V_λ 中特征值的总重数等于 λ 的总重数，则称 $A(x)$ 的特征值 $\lambda(x)$ 在 $x=0$ 连续。

为精确刻划连续性，仿造单个算子的情形，引进一个度量，为此，考虑 $A(x)$ 的重复特征值，即如果 λ 是 A 的 m 重特征值，则将 λ 看作 A 的 m 个特征值，这样 A 的联合特征值个数与 X 的维数相等，都为 N。

对 C^n 中的无序 N—组。$s=\{\lambda_i\}_{i=1}^N$，$s'=\{\lambda'_i\}_{i=1}^N$，$\lambda_i,\lambda'_i\in C^n$。

$$\text{令 } \operatorname{dist}(s,s')=\min\max_{1\le i\le N}\|\lambda'_i-\lambda_i\|, \tag{5.1}$$

其中 min 是对 s 的所有不同的排列取的。$\|\lambda'_i-\lambda_i\|$ 是 C^n 中的范数。易证(5.1)定义了一个距离。

定理5.6 设 $A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$ 是交换算子值函数组，$A(x)$ 在 $x=0$ 连续，用 $S(x)$ 表示 $A(x)$ 的 N 个重复特征值的无序组，则当 $x\to 0$ 时，$S(x)$ 按(5.1)定义的距离趋于 0。

注：可以看出 $A(0)$ 的每个联合特征值按定义 5.5 连续与 $S(x)$ 按(5.1)连续是等价的。

现证定理 5.6。只须证 $A(0)$ 的每个特征值按定义 5.5 连续。设 λ 是 $A(0)$ 的任一特征值，取 λ 的邻域 V，V 分离 λ 与 $S_p(A)\backslash\{\lambda\}$。固定 x，$A_i(x)-z_i-f_i(x,z)$ 关于 z 解析，并且 $f_i(x,z)$ 关于 (x,z) 连续，因此

$$P(x)\,\xi=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_V R_{A(x)-z}\xi dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$

关于 x 连续。由于 X 是有限维的，故 $P(x)$ 关于 x 连续。从而，$\dim P(x)=\dim P(0)$，当 $|x|<\delta$ 时。因此 $A(x)$ 的特征值 $\lambda(x)$ 在 $x=0$ 连续。

从 Kato [91]定理Ⅱ.5.2得

命题5.7 设$S(x)$是C^n中的无序N-组，$S(x)$在区间$I\subset R^1$中按(5.1)式定义的距离连续，则存在N个单值连续函数组$\mu_i(x)=(\lambda_1^i(x),\cdots\lambda_n^i(x))$，使对每个$x\in I$，$S(x)$可用$\{\mu_i(x)\}_{i=1}^N$来表示。

推论5.8 设$A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$是区间$I\subset R^1$中连续的交换算子函数组，那么存在$N=\dim X$个连续函数组$\{\mu_i(x)\}_{i=1}^N$，$\mu_k(x)=(\lambda_1^k(x)\cdots,\lambda_n^k(x))$使对每个$x\in I$，$A(x)$的$N$个重复特征值$S(x)$可用$\{\mu_k(x)\}_{k=1}^N$来表示。

注 实际上，联合特征值的连续性可以不考虑参变数x，而直接将A的N个重复特征值S看成为A的函数$S(A)$。同样可以证明$S(A)$是A的连续函数。

仿照单个算子，可以定义联合特征值及其特征投影的可微性，也可将 Kato [91] 定理Ⅱ.5.6 推广到算子组。

现设X是 Banach 空间，$A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$是定义在区域$D$中的交换算子值函数组。设$A(x)$在$x=0$解析，则有

命题5.9 证$S_p(x)=S_p(A(x))$，如果$S_p(x)$分离成两部分，则相应的z空间关于x解析。

证 设$S_p(0)$分离成$\sigma'(0)$、$\sigma''(0)$。则存在不交开集V'，V''使$\sigma'(0)\subset V'$，$\sigma''(0)\subset V''$。由联合谱的上半连续性，知存在$\delta>0$，当$|x|<\delta$时，$S_p(x)$也分离成二部分$\sigma'(x)$，$\sigma''(x)$，分别包含在V'，V''中。故当$|x|<\delta$时，$X=M'(x)\dotplus M''(x)$，满足$S_p(A(x)|_{M'(x)})=\sigma'(x)$，$S_p(A(x)|_{M''(x)})=\sigma''(x)$，而

$$P(x)\xi=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{V'}R_{A(x)-z}\xi dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n,$$

据 Taylor[113]第三章，$P(x)\xi$关于x解析。$P(x)$是X沿$M''(x)$到$M'(x)$的投影，所以$M'(x)=P(x)X$解析。同理$M''(x)$也解析。

根据这个命题$P(x)$解析。由 Kato [91]第二章§4.2及第七章§1.3，存在$U(x)\in L(X)$，$U(x)$，$U^{-1}(x)$ 都解析，使得$U(x)$：$M'(0)\to M'(x)$，$P(x)=U(x)P(0)U^{-1}(x)$。令

$$\widetilde{A}(x)=U^{-1}(x)A(x)U(x)=(U^{-1}(x)A_1(x)U(x),\cdots,$$

$U^{-1}(x)A_n(x)U(x))$，$\widetilde{A}(x)$仍为解析交换，并且$P(0)$与$A(x)$可交换。这样$A(x)|M'(0)$有意义。由于$\widetilde{A}(x)P(0)=U^{-1}(x)$ $A(x)\ P(x)\ U(x)$，得到$A(x)|_{M'(x)}$与$\widetilde{A}(x)|_{M'(0)}$相似，它们的特征值相同，特征向量有关系：若$f$是$\widetilde{A}(x)|_{M'(0)}$的相应于特征值$\lambda$的特征向量，则$U(x)f$是$A(x)|_{M'(x)}$的相应于特征值$\lambda$的特征向量。

$\widetilde{A}(x)$与$A(x)$相似，因此它们的联合谱相同，$A(x)$的谱可分离成二部分$\sigma'(x)$，$\sigma''(x)$，X有相应的分离$X=M'(0)\dot{+}M''(0)$。

设$\sigma'(0)$仅包含有限个有限重数的联合特征值，则$\dim M'(0)$ $0<\infty$，$\dim M'(x)=\dim M'(0)$。

下面我们给出两个定理，它们的证明是设法归结为有限维空间$M'(0)$上的问题，因此可引用前面的结果，具体证明不再赘述了。

定理5.10 设X是 Banach 空间，$A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$是在$x=0$解析的交换算子值函数组。则$A(x)$的任何有限个有限重数的孤立联合特征值都可用若干组解析函数的分支来表示（由于是解析函数的分支，可能有有限个代数奇点，如果用定理5.4的表达方式，应该说在$x=0$的一个不包含$A(x)|_{M'(0)}$的例外点的单连通邻域中，可用若干组解析函数来表示）。

定理5.11 若$A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$是在$x=0$连续的交换算子值函数组，则$A(x)$的任何有限个有限重数的孤立联合特征值作为重复特征值的无序组在$x=0$连续。

第十三章 具有谱容量的交换闭算子组

关于多个可分解算子组的谱理论，首先由 Frunza [77] 等开始。本章我们主要考虑具有谱容量的交换闭算子组，其中要用到很多有关有界的可分解算子组的结论，为节省篇幅，我们都不加证明地引用。有关可分解算子组的谱理论，国内还有邹承祖，刘光禄等人有过出色的工作，读者可参考有关文献阅读（[8]、[3]、[4]）。

§1 交换闭算子组的算子演算

Eschmeier.J 在[73] 中定义了交换的闭算子组的 Taylor 联合谱。设 X 是 Banach 空间，$T_1,\cdots,T_n$ 是 X 上的闭算子。对每个 i，存在 $\xi_i\in\rho(T_i)$，记 $A_i=(\xi_i-T_i)^{-1}$。若 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 是交换的算子组，则称 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是交换的闭算子组。而

$$S_p(T)=\left\{\left(\xi_1-\frac{1}{z_1},\cdots,z_n-\frac{1}{z_n}:(z_1,\cdots,z_n)\in S_p(A)\right\}$$

由于无界算子组的有关记号比较繁复，我们引进几个简写符号。

若$(i)=\{i_1,\cdots,i_n\}\subset\{1,\cdots,n\}$，$\tau=(t_1,\cdots,t_n)$是 n 个不定元，用 $t_{(i)}$ 表示 $t_{i_1}\wedge\cdots\wedge t_{i_n}$。$D_{(i)}=\bigcap\{D_{j_1\cdots j_k}$：对任意$\{j_1,\cdots,j_k\}\cap(i)=\phi\}$，其中 $D_{j_1\cdots j_k}$ 表示 $T_{j_1}\cdots T_{j_k}$ 的定义域。$D_{J_p}=\{\sum x_{(i)}t_{(i)}$：$x_{(i)}\in D_{(i)},|(i)|=p\}$。$J_p$ 是从 D_{J_p} 到 $D_{J_{p+1}}$ 的映射：$\sum x_{(i)}t_{(i)}\to\sum\limits_{(i)}\sum T_jx_{(i)}t_j\wedge t_{(i)}$。

设 U 是 $\hat{C}^n=\hat{C}\times\cdots\times\hat{C}$ 中的开集 $(\hat{C}=C\cup\{\infty\})$，我们定义：

(1) $\hat{\mathscr{U}}(U,X)=\{f;f\in\mathscr{U}(U,D_{(i)})$，且对任意$\{j_1,\cdots,j_k\}\cap(i)=\phi$，则有 $z_{j_1}\cdots z_{j_k}f(z)\in\mathscr{U}(U,D_{(i)})$ 以及 $T_{j_1}\cdots T_{j_k}z_{j_1}\cdots z_{j_k}f(z)\in\mathscr{U}(U,X)\}$

$$\Lambda^p[\tau,\hat{\mathscr{U}}(U,X)]=\{\sum f_{(i)}t_{(i)};\ f(i)\in\hat{\mathscr{U}}(U,X),|(i)|=p\},$$
$$p=0,\cdots,n。$$

(2) $\hat{C}^{\infty}_{(i)(j)}(U,X)=\{f;f\in C^{\infty}(U,D_{(i)})$，且对任意$\{j_1,\cdots,j_k\}\cap(i)\neq\phi$，$\{i_1,\cdots,i_k\}\subset(i)$，则有$z_{i_1}\cdots z_{i_k}\bar{z}^2_{j_1}\cdots\bar{z}^2_{j_k}\in C^{\infty}(U,D_{(i)})$以及

$T_{i_1}\cdots T_{i_k}z_{i_1}\cdots z_{i_k}\bar{z}^2_{j_1}\cdots\bar{z}^2_{j_k}f(z)\in C^{\infty}(U,X)\}$

$\Lambda^p[\tau\cup d\bar{z},\hat{C}^{\infty}(U,X)]=\{\sum f_{(i)(j)}t_{(i)}\wedge d\bar{z}_{(j)};$
$f_{(i)(j)}\in C^{\infty}_{(i)(j)}(U,X),|(i)|+|(j)|=p\},p=0,\cdots,2n。$

J_p 亦可表示 $\Lambda^p[\tau,\hat{\mathscr{U}}(U,X)]$到$\Lambda^{p+1}[\tau,\hat{\mathscr{U}}(U,X)]$的映射，$\sum f_{(i)}t_{(i)}\to\sum\limits_{(i)}\sum\limits_{j}(z_j-T_j)f_{(i)}(z)t_j\wedge t_{(i)}$。$J_p\oplus\bar{\partial}$是$\Lambda_p[\tau\cup d\bar{z},\hat{C}^{\infty}(0,X)]$到$\Lambda^p[\tau\cup d\bar{z},\hat{C}^{\infty}(U,X,]$内的映射：

$$(J_p\oplus\bar{\partial})\sum f_{(i)(j)}t_{(i)}\wedge d\bar{z}_{(j)}$$
$$=\sum_{(i)(j)}\sum_k(z_k-T_k)f_{(i)(j)}t_k\wedge t_{(i)}\wedge d\bar{z}_{(j)}+\sum_{(i)(j)}\sum_k\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}f_{(i)(j)}d\bar{z}_k\wedge t_{(i)}\wedge d\bar{z}_{(j)}。$$

若U是 $\hat{C}^n$ 中开集，$\xi_i\in\rho(T_i)\cap C$，$i=1,\cdots,n$。我们用$\frac{1}{\xi-U}$表示集合$\left\{\left(\frac{1}{\xi_1-z_1},\cdots,\frac{1}{\xi_n-z_n}\right);z=(z_1,\cdots,z_n)\in U\right\}$。

定理1.1 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$是交换闭算子组，$\xi_i\in\rho(T_i)$，$A_i=(\xi_i-T_i)^{-1}$，$A=(A_1,\cdots,A_n)$，则下列图可交换：

$$0\to\Lambda^0[\tau,\widehat{\mu}(U,X)]\xrightarrow{\tau_0}\Lambda'[\tau,\widehat{\mu}(U,X)]\to\cdots\xrightarrow{J_{n-1}}\Lambda^n[\tau,\widehat{\mu}(U,X)]\to 0$$

$$\downarrow u_0 \qquad\qquad \downarrow u_1 \qquad\qquad \downarrow u_n$$

$$0\to\Lambda^0[\sigma,\widehat{\mu}(V,X)]\xrightarrow{\alpha_0}\Lambda'[\sigma,\widehat{\mu}(V,X)]\to\cdots\xrightarrow{\alpha_{n-1}}\Lambda^n[\sigma,\widehat{\mu}(V,X)]\to 0$$

其中$V=\frac{1}{\xi-U}$，U_p是$\Lambda^p[\tau,\widehat{\mathscr{U}}(U,X)]$到$\Lambda^p[\sigma,\mathscr{U}(V,X)]$上的同构；对任意$f_{(i)}t_{(i)}\in\Lambda^p[\tau,\widehat{\mathscr{U}}(U,X)]$，$U_p(f_{(i)}t_{(i)})_{(\lambda)}=\prod\limits_{j\in(i)}\left(\frac{T_j-\xi_j}{\lambda_j}\right)f_{(i)}\left(\xi-\frac{1}{\lambda}\right)S_i$。因此，若记$H^p[\widehat{\mathscr{U}}(U,X),T]=\mathrm{Ker}J_p/\mathrm{Im}J_{p-1}$，则$H^p[\mathscr{U}(U,X),J]\cong H^p[\mathscr{U}(V,X),\alpha]$，$p=0,1,\cdots n$。

定理 1.2 T和A如定理1.1则

$$0\to\Lambda^0[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X)]\xrightarrow{J\oplus\bar{\partial}}\cdots\to\Lambda^{2n}[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(V,X)]\to 0$$

$$\downarrow w_0 \qquad\qquad\qquad \downarrow w_{2n}$$

$$0\to\Lambda^0[\sigma\cup d\bar{\lambda},C^\infty(V,X)]\xrightarrow{\alpha\oplus\bar{\partial}}\cdots\to\Lambda^{2n}[\sigma\cup d\bar{\lambda},C^\infty(V,X)]\to 0$$

其中w_p是$\Lambda^p[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X)]$到$\Lambda^p[\sigma\cup d\bar{\lambda},C^\infty(V,X)]$上的同构：对任意$f_{(i)(j)}t_{(i)}\wedge d\bar{z}_{(j)}\in\Lambda^p[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X)]$，

$w_pf_{(i)(j)}t_{(i)}\wedge d\bar{z}_j=(-1)^{|(j)|}\prod\limits_{k\in(i)}\left(\frac{T_k-\xi_k}{\lambda_k}\right)\prod\limits_{k\in(j)}\frac{1}{\bar{\lambda}_k^2}f_{(i)(j)}\left(\xi-\frac{1}{\lambda}\right)$

$S_{(i)}\wedge d\bar{\lambda}_{(j)}$，因此，若记$H^p(C(U,X),J\oplus\bar{\partial}]=\mathrm{Ker}(J_p\oplus\bar{\partial})/\mathrm{Im}(J_p\oplus\bar{\partial})$，则有

$H^p[C(U,X),J\oplus\bar{\partial}]\cong H^p[C(V,X),\alpha\oplus\bar{\partial}]$，$p=0,\cdots,2n$。

定理1.1和1.2的证明可以直接进行计算得到，略去。

设U是C^n中的开集，$z\in U$，用$O^p\{(z),X\}$表示在z上次数为p的解析型的芽的全体，$O^p(U,X)$表示在U上次数为p的解析型的芽的全体。类似定义$B^p(\{z\},X)$为在z上次数为p的光滑型的芽的集合，$B^p(U,X)$为在U上次数为p的光滑型的芽

的层。以自然的方式，有 $O^p(\{z\},X)(B^p(\{z\},X))$ 到 $O^{p+1}(\{z\},X)(B^{p+1}(\{z\},X))$ 的映射 $J_p(J_p\oplus\overline{\partial})$，定义 $H^p[C^\infty[\{z\},X),J]=\mathrm{Ker}J_p/\mathrm{Im}J_{p-1}$，$H^p[C^\infty(\{z\}),X),J\oplus\overline{\partial}]=\mathrm{Ker}(J_p\oplus\overline{\partial})/\mathrm{Im}(J_{p-1}\oplus\overline{\partial})$。由定理 1.2 得下列推论：

推论1.3 对任意 $z\in C^n$ 和 $\lambda=\frac{1}{\xi-z}$，$H^p[\mathscr{U}(\{z\},X),J]\cong H^p[\mathscr{U}(\{\lambda\}),X),\alpha],0\leqslant p\leqslant n$；$H^p[C^\infty(\{z\},X),J\oplus\overline{\partial}]\cong H^p[C^\infty(\{\lambda_i\},X),\alpha\oplus\overline{\partial}]$。

推论1.4 对任意 $z\in\rho(T)$，$H^p[\mathscr{U}(\{z\},X),J]=0,p=0,\cdots,n$；$H^p[C^\infty(\{z\},X),J\oplus\overline{\partial}]=0,p=0,\cdots,2n$。

证　若 $z\in\rho(T)$，可选 $\xi_i\in\rho(T_i)$ 但 $\xi_i\neq z_i$，$i=1,\cdots,n$。则 $\lambda=\frac{1}{\xi-z}\in\rho(T)\cap C^n$，于是 $H^p[\hat{\mathscr{U}}(\{z\}X),J]\cong H^p[\mathscr{U}(\{\lambda_j\},X),\alpha]=0$。类似可证 $H^p[C^\infty(\{z\},X),J\oplus\overline{\partial}]=0$。证毕。

命题1.5 对任意开集 $U\subset\rho(T)$，下列正合。

$$0\to\Lambda^0[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(U,X)]\to\cdots\to\Lambda^{2n}[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(U,X)]\to 0。$$

证　设 $\psi\in\Lambda^p[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(U,X)]$，$(\psi)_z$ 是层 B^p 的截面，因 $B^p(U,X)$ 是强层，而 $H^p[C^\infty(\{z\},X),J\oplus\overline{\partial}]=0$ 对任 $z\in U$ 成立，于是由[94]命题 6.3.2 和 6.3.6，上述叙列是正合的。证毕。

推论1.6 若 f 是在 $S_p(T)$ 的某邻域解析的函数，则对任意 $x\in X$，存在 $\psi\in\Lambda^{n-1}[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(V,X)]$ $(V=U\cap\rho(T))$，使 $f\cdot xt_1\wedge\cdots\wedge t_n=(J\oplus\overline{\partial})\psi$。特别有 $\psi\in\Lambda^{n-1}[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(\rho(T),X)$ 使 $xt_1\wedge\cdots\wedge t_n=((J\oplus\overline{\partial})\psi$。

证　由定义验证 $\wedge f(z)xt_1\wedge\cdots\wedge t_n\in\Lambda^n[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(V,X)]$ 且

$(J\oplus\overline{\partial})(f(z)xt_1\wedge\cdots\wedge t_n)=0$，于是直接可由命题1.5得到。证毕。

我们将定义“单值延拓性”，在叙述定义之前，我们需要以下引理，如[94]引理2.1。

为方便起见，记$\Lambda^p_q[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(U,X)]=\{\sum f_{(i)(j)}t_{(i)}\wedge d\overline{z}_{(j)}$；$|(i)|+|(j)|=p,|(i)|=q\}$。

引理1.7 设D是C^n中多圆柱，则对任k，$0\leqslant k\leqslant n$，下列正合

$$0\to\Lambda^k[\tau,\mathscr{O}(D,X)]\xrightarrow{i}\Lambda^k_k[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(D,X)]\xrightarrow{\overline{\partial}}\cdots\xrightarrow{\overline{\partial}}\Lambda^{k+n}[\tau\cup z,C^\infty(D,X)]\to0$$

其中i为嵌入映射。

证 先证$k=0$的情况。

不失一般性，我们设D的中心为$(0,\cdots,0)$。我们证明类似[94]定理5.8.1、5.8.2，但稍微复杂一些。证明分下面几步：

(1) 对任意相对紧多圆柱$D'\subset D$，若$\psi\in\Lambda^{p+1}_0[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(D,X)]$且$\overline{\partial}\psi=0$，则必有$\varphi\in\Lambda^p_0[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(U,X)]$，使$\overline{\partial}\varphi=\psi$在$D'$上成立，这里$U$是$\overline{D'}$的某领域。这部分用归纳法来证明。假设归纳的第$k-1$步证明是对的，即若$\psi$不含$d\overline{z}_k,\cdots,d\overline{z}_n$时结论是成立的。设$\psi$不含$d\overline{z}_{k+1},\cdots,d\overline{z}_n$。则$\psi=d\overline{z}_k\Lambda g+h$，其中$g$，$h$与$d\overline{z}_k,\cdots,d\overline{z}_n$无关。设$g=\sum g_i d\overline{z}_i$。

令 $$G_i=\frac{1}{2\pi i}\int(t-z_k)^{-1}\theta(t)g_i(z_1,\cdots,t\cdots,z_n)dt\,d\overline{z},$$

其中$\theta(t)$是有紧支集的标量函数。由于$g_i\in\hat{C}^\infty_{(\cdot)}(D,X)$则对任意$\{j_1,\cdots,j_k\}\subset\{1,\cdots,n\}$，$T_{j_1}\cdots T_{j_k}g_i\in C^\infty(D,X)$，于是$G_i\in C^\infty(D,D_0)$且$T_{j_1}\cdots T_{j_k}G_i\in C^\infty(D,X)$。这样由定义$G=\sum G_i\wedge d\overline{z}_i\in\Lambda^{p+1}_0[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(D,X)]$。验证可知$\psi-\overline{\partial}G$与$d\overline{z}_k,\cdots,d\overline{z}_n$

无关，于是有 φ_1，使 $\overline{\partial}\varphi_1=\psi-\overline{\partial}G=$ 在 U 上成立。设 $\varphi=\varphi_1+g$，则 $\overline{\partial}\varphi=\psi$ 在 U 上成立。

(2) 对 $p=0$，选 $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$，D_j 在 D 中相对紧且与 D 有相同的中心，满足 $\overline{D_j}\subset D_{j+1}$，$\bigcup_{j=1}^{\infty}D_j=D$。我们构造 $\{\varphi_j\}\subset\Lambda^0[\tau,\mathscr{U}(D,X)]$ 满足：

(a) $\overline{\partial}\varphi_j=\psi$ 在 $\overline{D_j}$ 的某一邻域上成立，$j=1,\cdots$；

(b) $\|\varphi_{j+1}-\varphi_j\|_{\overline{D}_j}\leqslant\frac{1}{2^j}$，其中 $\|\varphi_{j+1}-\varphi_j\|=\max\limits_{z\in D_j}\|\varphi_{j+1}(z)-\varphi_j(z)\|$；

(c) 对任意 $\{j_1,\cdots,j_k\}\subset\{1,\cdots,n\}$，

$$\|T_{j_1}\cdots T_{j_k}(\varphi_{j+1}-\varphi_j\|_{\overline{D}_j}<\frac{1}{2^j}。$$

设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 满足上述条件，由第1步，我们得到 φ'_{k+1}，使得 $\overline{\partial}\varphi'_{k+1}=\psi$ 在 $\overline{D}_{k+1}$ 的某邻域中成立。取 $\varphi'_{k+1}-\varphi_k$ 以及 $T_{j_1}\cdots T_{j_k}(\varphi'_{k+1}-\varphi_k)$ 的Taylor展开，可得多项式 p，其系数在 D_0 内，使 $\|\varphi'_{k+1}-\varphi-p\|_{D_k}<\frac{1}{2^k}$，$\|T_{j_1}\cdots T_{j_k}(\varphi'_{k+1}-\varphi_k-p)\|_{D_k}<\frac{1}{2^k}$ 对任意 $\{j_1,\cdots,j_k\}\subset\{1,\cdots,n\}$ 成立。

设 $\varphi_{k+1}=\varphi'_{k+1}-p$。这样 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和 $\{T_{j_1}\cdots T_{j_k}\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $\overline{D_k}$ 上一致收敛。令 $\varphi=\lim\varphi_j$，则 $\varphi\in\Lambda^0[\tau,\mathscr{U}(D,X)]$ 且 $\overline{\partial}\varphi=\psi$。

(3) $p\geqslant1$ 的情况证明同[94]定理5.8.2。注意到 $\{\varphi_j\}$ 满足条件 $\varphi_{k+1}|\overline{D}_k=\varphi_k$，因此 $\varphi|_{D_k}=\varphi_k$，故 $\varphi\in\Lambda_0^p[\tau\bigcup d\overline{z},C^{\infty}(D,X)]$。

现假假 $k\geqslant0$。$\psi\in\Lambda_k^{k+p+1}[\tau\bigcup d\overline{z},C^{\infty}(D,X)]$。假设 $\psi=\sum f_{(i)(j)}t_{(i)}\wedge d\overline{z}_{(j)}$，则 $\overline{\partial}\psi=0$ 等式于对任意 (i)，

$\overline{\partial}\left(\sum\limits_{i}f_{(i)(j)}d\overline{z}_j\right)=0$。同样我们可构造 $\sum g_{(i)(j)}\ d\overline{z}_{(j)}$ 使得 $g_{(i)(j)}\in$

$C^\infty(D,D_i)$，且对任意$\{j_1,\cdots,j_k\}\cap(i)=\phi$，就有$T_{j_1}\cdots T_{j_k}g_{(i)(j)}\in C^\infty(D,X)$，$\bar\partial\left(\sum_{(j)}g_{(i)(j)}d\overline{z}_{(j)}\right)=\sum_{(j)}f_{(i)(j)}d\overline{z}_j$。令 $\varphi_{(i)}=\sum_{(j)}g_{(i)(j)}d\overline{z}_j$，

$\varphi=\sum\varphi_{(i)}\Lambda t_{(i)}$，则 $\varphi\in\Lambda_k^{k+p}[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(D,X)]$，且 $\bar\partial\varphi=\sum\bar\partial\varphi_{(i)}=\psi$。证毕。

若 $D=D_1\times\cdots\times D_n$ 是 $\hat{C}^n$ 中开多圆柱，其中 $D_i=\{z:|z-b_i|<r_i\}$或 $D_i=\{z:|z|>r_i\}$。用 D' 表示 C^n 中多圆柱 $D'_1\times\cdots\times D'_n$，其中 $D_i\subset C$，则 $D'_i=D_i$，否则 $D'_i=\frac{1}{D_i}$。

引理 1.8 若 D 是 $\hat{C}^n$ 中多圆柱，则引理 1.7 中叙列正合。

证　不妨设 $D_i=\{z:|z|>r_i\}(i>k)$，而 $D_i\subset C(i\leqslant k)$。定义映射$\delta_p:\Lambda_k^{k+p}[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(D,X)]\to\Lambda_k^{k+p}[\tau\cup d\overline{\lambda},C^\infty(D',X)]$，

$\delta_p f_{(i)(j)}d\overline{z}_{(j)}\wedge t_{(i)}=\prod_{q\in(j)/(1,\cdots,k)}\frac{1}{\overline{\lambda}_q^2}f^*_{(i)(j)}d\overline{\lambda}_{(j)}\wedge t_{(i)}$，其中

$$f^*_{(i)(j)}(\lambda)=f\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_k,\frac{1}{\lambda_k},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right)。$$

$$\delta_*:\Lambda^k[\tau,\mathscr{U}(D,X)]\to\Lambda^k[\tau,\mathscr{U}(D',X)],$$

$\delta_* f_{(i)}t_{(i)}=f^*_{(i)}t_{(i)}$。易验证下图可换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to\Lambda^n[\tau,\mathscr{U}(D,X)] & \xrightarrow{i} & \Lambda_k^k[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(D,X)] & \to\cdots\to & \Lambda_k^{k+n}[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(D,X)]\to 0\\
\downarrow\delta_* & & \downarrow\delta_1 & & \downarrow\delta_n\\
0\to\Lambda^n[\tau,\mathscr{U}(D',X)] & \xrightarrow{i} & \Lambda_k^k[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(D',X)] & \to\cdots\to & \Lambda_k^{k+n}[\tau\cup d\overline{z},C^\infty(D',X)]\to 0
\end{array}$$

于是，由引理 1.7 得引理 1.8。

定义1.9　设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是交换闭算子组，若对任意 $z\in\hat{C}^n$，$H^p[\mathscr{U}(\{z\},X),J]=0$，$1\leqslant p\leqslant n-1$，则称 T 具有单值延拓性(SVEP)。

定理1.10　设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是交换的闭算子组，则下列条件等价：

(1)$H^p[\mathscr{U}(\{z\},X),J]=0$，对任意 $z\in\hat{C}^n$，$p=0,\cdots,n-1$；

(2)$H^p[C^\infty(\{z\},X),J\oplus\bar{\partial}]=0$，对任意$z\in\hat{C}^n$，$p=0,1,\cdots,n-1$；

(3)$H^p[C^\infty(U,X),J\oplus\bar{\partial}]=0$，对任意开集 $U\subset\hat{C}^n$，$p=0,\cdots,n-1$；

(4)$H^p[\mathscr{U}(D,X),J]=0$，对任意 $\hat{C}^n$ 中多圆柱D，$p=0,1,\cdots,n-1$。

证 (1)⇒(2)：由引理1.7，1.8，用[76]命题2.1的同样方法可得。

(2)⇒(3)：由假定$0\to B^0(\{z\},X)\to B'(\{z\},X)\to\cdots\to B^n(\{z\},X)$是正合的。由[92]推论6.3.3和6.3.4，$0\to\Lambda^0[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X)]\to\cdots\to\Lambda^n[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X)]$ 正合，即 $H^p[C^\infty(U,X),J\oplus\bar{\partial}]=0$，$p=0,\cdots,n-1$。

(3)⇒(4)：若 $\varphi\in\Lambda^p[\tau,\mathscr{U}(D,X)]$ 且 $J_p\varphi=0$，则 $(J_p\oplus\varphi)=0$，因此有 $\psi\in\Lambda^{p-1}[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(V,X)]$ 使 $(J_{p-1}\oplus\bar{\partial})\psi=\varphi$。用[72]命题2.1方法可知有 $\xi\in\Lambda^{p-1}[\tau,\mathscr{U}(D,X)]$，使 $J\xi=\varphi$。

(4)⇒(1)：显然。证毕。

命题1.11 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是交换的闭算子组，$\xi_i\in\rho(T_i)\cap C$，$A_i=(\xi_i-T_i)^{-1}$，$i=1,\cdots,n$。$A=(A_1,\cdots,A_n)$。则 T 具有SVEP的充要条件是 A 具有SVEP。

证 对任意 $\lambda\in C^n$，则 $\lambda\in\rho(A)$（此时也把 A 看作闭算子组），因此 $H^p[\mathscr{U}(\{\lambda\},X),\alpha]=0$，$p=0,1,\cdots,n$ 成立。当 $\lambda\in C^n$ 时，由命题1.3，$H^p[\mathscr{U}(\{\lambda\},X),\alpha]\cong H^p[\mathscr{U}(\{z\},X),J]$ 可得。证毕。

定义1.12 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有SVEP，则任意 $x\in X$，局部谱 $\sigma(T,x)$ 定义为 $\rho(T,x)=\bigcup\{U\subset C^n$：存在 $\psi\in\Lambda^{n-1}[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X)]$使$xt_1\wedge\cdots\wedge t_n=(J\oplus\bar{\partial})\psi\}$的余集。

命题1.13 T 和 A 如命题 1.9，则 $\sigma(T,x)=\xi-\frac{1}{\sigma(A,x)}$，$\Pi_i(\sigma(T,x))=\sigma(T_i,x)$ 对任意 i 成立。这里 π_i 是 C^n 中对第 i 个坐标投影。

证 直接从定义和定理 1.2 以及[73]推论 2.2 得到。证毕。

在[73]中，Eschmeier定义了交换闭算子组的解析演算。若f在$S_p(T)$的邻域解析，则f_ξ在$S_p(A)$邻域上解析$\left(f_\xi(\lambda)=f\left(\xi-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$。于是 $f(T)$定义为 $f_\xi(A)$。我们试图直接定义算子演算。

设 $C^{\xi_i}=C\backslash\{\xi_i\}$，$C^n_\xi=C_{\xi_1}\times\cdots\times C_{\xi_n}$，则 C^n_ξ 是局部紧空间。注意到若用 C^n_ξ 中紧集代替 C^n 中紧集，则[113]引理 3.3，3.4 都是成立的。因此，若 f 在 $S_p(T)$的邻域 U 上解析（可假定 $U\subset C^n_\xi$），则存在 $\chi\in\Lambda^n[\tau\cup d\bar{z},C^\infty_\xi(U,\lambda)]$使$f(z)xt_1\wedge\cdots\wedge t_n-\chi=(J\oplus\bar{\partial})\psi$，这里 $C^\infty_\xi(U,X)$表示在 C^n_ξ 中有紧支集的型。设 π 是使 χ 只保留$d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n$ 的，而 $T_\xi(z)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i-T_i}{\xi_i-z_i}\right)$，定义 $R_{z-T}f(z)x=(-1)^n\pi\chi$，则可证明

$$f(T)x=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int T_\xi(z)R_{z-T}f(z)xdz_1\wedge\cdots\wedge dz_n \text{ 是可积的，}$$

而 $f\to f(T)$是满足谱映照定理的代数同态。由于[113]定理 2.2 定理2.4，只需证明

$$f_\xi(A)x=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int T_\xi(z)R_{z-T}f(z)xdz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\text{。}$$

定理1.14 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$是交换的闭算子组，A 如命题 1.9。f 在 $S_p(T)$的邻域 U 上解析，则对任意 $x\in X$，$f_\xi(A)x=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_U T_\xi(z)R_{z-T}f(z)xdz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$。

证 用定理1.2，等式 $f(z)xt_1\wedge\cdots\wedge t_n-\chi=(J\oplus\bar{\partial})\psi$ 成为 $w_n(f(z)xt_1\wedge\cdots\wedge t_n)-w_n\chi=(\partial\oplus\bar{\partial})(w_n-\psi)$，即$f_\xi(\lambda)xS_1\wedge\cdots\wedge S_n$

$-w_n\chi=(a\oplus\bar\partial)(\omega_{n-1}-\psi)$。 由定义 $R_{\xi-A}f_\xi(\lambda)x=(-1)^n\pi\omega_n\chi=(-1)^n\omega_n\pi x_0$ 令 $\chi=x_1+hd\overline{z_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z_n}$，则 $w_n\pi\chi=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i-T_i}{\lambda_i}\right)$
$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i^2}h\left(\xi-\frac{1}{\lambda}\right)d\overline{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{\lambda_n}$，

因此，$f_\xi(A)x=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{U_\xi}(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i-T_i}{\lambda_i}\right)\prod_{i=1}\frac{1}{\lambda_i^2}h\left(\xi-\frac{1}{\lambda}\right)$

$$d\overline{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{\lambda_n}\wedge d\lambda_1\wedge\cdots\wedge d\lambda_n$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_U(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i-T_i}{\xi_i-z_i}\right)h(z)d\overline{z_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z_n}\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_U T_\xi(z)R_{z-T}f(z)x\,dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$ 证毕。

记 $\mathrm{Inv}(T)=\{Y:Y$ 是 X 的闭子空间，且 $T_i(Y\cap DT_i)\subset Y$，$\rho(T_i|Y)\neq\phi,i=1,\cdots,n\}$；$R(T)=\{Y:Y\in\mathrm{Inv}(T)$，且 $\rho(T_i)\cap\rho(T_i|Y)\neq\phi\}$。

推论1.15 设 $Y\in R(T)$，U 是 $S_p(T)\cup S_p(T|Y)$ 的邻域。若 f_k 在 U 上解析，$k=1,\cdots,m$，$f(T)=(f_1(T),\cdots,f_m(T))$，则 $Y\in\mathrm{Inv}(f(T))$，并且 $f(T|_Y)=f(T)|_Y$。特别若 $\xi_i\in\rho(T_i)$，$A_i=(\xi_i-T_i)^{-1}$，则 $Y\in\mathrm{Inv}(A)$ 且 $A|Y=((\xi_1-T_1|_Y)^{-1},\cdots,(\xi_n-T_n|_Y)^{-1})$。

证 对任意 $\xi_i\in\rho(T_i)\cap\rho(T_i|_Y)$ 和 $y\in Y$，

$$f_k(T|_Y)y=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int T_\xi(z)R_{z-T/Y}f_k(z)y\,dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int T_\xi R_{z-T}f_k(z)y\,d\overline{z_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z_n}\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$
$$=f_k(Y)y。$$

因此 $f_k(T)y\in Y$，且 $f_k(T)y=f_k(T|Y)y$。证毕。

若 T 具有 SVEP，我们也可以定义在局部谱上的解析演算。

若 f 在 $\sigma(T,X)$ 的邻域 U 上解析，则必有 $\chi\in\Lambda^n[\tau\cup\overline{dz}, C_\xi^\infty(U, X)]$ 使 $f(z)xt_1\wedge\cdots\wedge t_n-\chi=(J\oplus\overline{\partial})\psi$ 在 U 上成立。我们定义 $f_T(x)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int T_\xi(z)(-1)^n\pi\chi dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$。[70]中结果全部可推广到 n 个闭算子的情况，特别当 f 在 $S_p(T)$ 的邻域解析时，则有 $f(T)x=f_T(x)$。由于证明类同，我们略去详细的证明。我们有如下的命题。

命题1.16 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有SVEP，若对 $x\in X$，$\sigma(T,x)$ 在 C^n 中紧，则 $x\in\bigcap_{i=1}^n D_{T_i}$，且 $f(T)x=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int R_{z-T}f(z)xdz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$ 对任意在 $S_p(T)$ 的邻域解析的函数 f 成立。

证 因 $\sigma(z)=\prod_{i=1}^n(\xi_i-z_i)$ 在 $\sigma(T,x)$ 的某相对紧邻域 U 上解析，于是存在 χ，具有紧支集，使 $f(z)xt_1\wedge\cdots\wedge t_n-\chi=(J\oplus\overline{\partial})\psi$。因此 $g(z)f(z)t_1\wedge\cdots\wedge t_n-g(z)\chi=(J\oplus\overline{\partial})g(z)\psi$。结果

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int R_{z-T}f(z)xdz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\\
&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int(-1)^n\pi\chi dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\\
&=\prod_{i=1}^n A_i\left[\left(\frac{1}{2\pi_i}\right)^n\int T_\xi(z)\pi g(z)\chi dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\right]\\
&=\prod_{i=1}^n A_i(fg)_T(x)\\
&=\prod_{i=1}^n A_i f(T)\prod_{i=1}^n(\xi_i-T_i)x\\
&=f(T)x。
\end{aligned}
$$

因此 $x=(hg)_T(x)=h_T(g_T(x))=\prod_{i=1}^n A_i[g_T(x)]$，即 $x\in\bigcap_{i=1}^n D_{T_i}$ 且 $\prod_{i=1}^n(\xi_i-T_i)x=g_T(x)$。证毕。

§2 具有谱容量的闭算子组

引理2.1 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$是交换闭算子组，$X=X_1\dotplus X_2$，$X_j\in R(T)$，$j=1,2$。对任意$\xi_i\in\rho(T_i)\cap\rho(T_i|X_1)$，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$U\subset C^n_\xi$，则必有

(1) 对任意$\varphi\in\Lambda^p[\tau,\mathscr{U}(U,X)]$可写成$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$，其中$\varphi_i\in\Lambda^p[\tau\cup d\bar{z},\mathscr{U}(U,X_j)]$，$j=1,2$。

(2) 对任意$\psi\in\Lambda^p[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X)]$可写成$\psi_1+\psi_2$，其中$\psi_j\in\Lambda^p[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X_j)]$，$j=1,2$。

证 (1) 另证$\rho(T_i)\cap\rho(T_i|X_1)\subset\rho(T_i|X_2)$，因而$\xi_i\in\rho(T_i|X_2)$若$\varphi\in\Lambda^p[\tau,\mathscr{U}(U,X)]$，则由定理1.1得$u_p\varphi\in\Lambda^p[\alpha,\mathscr{U}(V,X)]$，其中$V=\dfrac{1}{\xi-U}$。因$X_j\in\mathrm{Inv}(A)$（推论1,15），而$A$是有界的，这样$u_p\varphi=\varphi_1^*+\varphi_2^*$，其中$\varphi_j^*\in\Lambda^p[\alpha,\mathscr{U}(V,X)]$，$j=1,2$。因此$\varphi=u_p^{-1}\varphi_1^*+u_p^{-1}\varphi_2^*$，易验证$u_p^{-1}\varphi_j^*\in\Lambda^p[\tau,\mathscr{U}(U,X_j)]$，于是令$\varphi_j=u_p^{-1}\varphi_j^*$就可以了。

(2) 用同样方法可得。证毕。

引理2.2 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$是交换的闭算子组，$Y\in R(T)$，对任意$\xi_i\in\rho(T_i)\cap\rho(T_i|Y)$，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$U\subset C^n_\xi$，则有

(1) 任意$\tilde{f}\in\Lambda^p[\tau,\mathscr{U}(U,X/Y)]$可写成$\tilde{f}=f/Y$，其中$f\in\Lambda^p[\tau,\mathscr{U}(U,X)]$。

(2) 任意$\tilde{g}\in\Lambda^p[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X)]$可写成$\tilde{g}=g/Y$，其中$g\in\Lambda^p[\tau\cup d\bar{z},C^\infty(U,X)]$。

证 T_i^Y是X/Y上的闭算子，且$S_p(T_i^Y)\subset S_p(T_i)\cap S_p(T_i|Y)$，因此$\xi_i\in\rho(T_i)\cap\rho(T_i|Y)\subset\rho(T_i|Y)\subset\rho(T_i^Y)$，且$(\xi_i-T_i^Y)^{-1}=$

A^Y_i，其中$A_i=(\xi_i-T_i)^{-1}$。若$\widetilde{f}\in\Lambda^p[\tau,\mathscr{U}(U,X/Y)]$，则$u_p\widetilde{f}\in\Lambda^p[\sigma,\mathscr{U}(V,X/Y)]$。由推论1.15，$Y\in\mathrm{Inv}(A)$，因此有$f^*\in\Lambda^p[\sigma,U(V,X)]$使$f^*/Y=u_p\widetilde{f}$。令$f=u_p^{-1}f^*$，则$f\in\Lambda^p[\tau,\mathscr{U}(V,X)]$且$f/Y=\widetilde{f}$。同样可得（2）。证毕。

引理2.3 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$是交换的闭算子组，则

（1）若$X=X_1+X_2$，$X_j\in R(T)$，$j=1,2$，则对任意$x\in D_{(i)}$，$(i)\subset\{1,\cdots,n\}$，x可写成$x=x_1+x_2$，其中$x_j\in X_j\bigcap D_{(i)}$，$j=1,2$。

（2）若$Y\in R(T)$，$\widetilde{D}_{(i)}=\bigcap\{\widetilde{D}_{j_1\cdots j_k}:\{j_1\cdots j_k\}\bigcap(i)=\phi\}$，其中$\widetilde{D}_{j_1\cdots j_k}$为$T^Y_{j_1}\cdots T^Y_{j_k}$的定义域，则任意$\widetilde{x}\in\widetilde{D}_{(i)}$，$\widetilde{x}=x/Y$，其中$x\in D_{(i)}$。

证 （1）选$\xi_i\in\rho(T_i)\bigcap\rho(T_i|X_1)\bigcap\rho(T_i|X_2)$，$i=1,\cdots,n$。若$x\in D_{(i)}$，则$\prod\limits_{j\in(i)}(\xi_j-T_j)x=x_1^*+x_2^*$，其中$x_j^*\in X_j$，$j=1,2$。因此$x=\prod\limits_{j\in(i)}A_jx_1^*+\prod\limits_{j\in(i)}A_jx_2^*$。由于$x_1,x_2\in R(T)\subset\mathrm{Inv}(A)$，则有$x_1=\prod\limits_{j\in(i)}A_jx_1^*\in X_1\bigcap D_{(i)}$。同样$x_2=\prod\limits_{j\in(i)}A_jx_2^*\in x_2\bigcap D_{(i)}$，而$x=x_1+x_2$。

（2）选$\xi_i\in\rho(T_i)\bigcap\rho(T_i|Y)$，则$\xi_i\in\rho(T^Y_i)$，$(\xi_i-T^X_i)^{-1}=A^Y_i$。若$\widetilde{x}\in\widetilde{D}_{(i)}$，则$\prod\limits_{j\in(i)}(\xi_j-T_j)^Y\widetilde{x}\in X/Y$，故有$x^*\in X$，使$x^*/Y=\prod\limits_{j\in(i)}(\xi_j-T_j)^Y\widetilde{x}$。设$x=\prod\limits_{j\in(i)}A_ix^*$，则$x\in D(i)$，且$x/Y=\widetilde{x}$。证毕。

定义2.4 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$是交换的闭算子组，若存在从$\hat{C}^n$中闭子集全体$\mathscr{F}(\hat{C}^n)$到$\mathrm{Inv}(T)$的映射ε，满足

（1）$\varepsilon(\phi)=\{0\}$，$\varepsilon(\hat{C}^n)=X$；

（2）对任意$\{F_i\}\subset\mathscr{F}(\hat{C}^n)$，$\varepsilon\left(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}F_j\right)=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\varepsilon(F_j)$，

(3) 对任意 $\hat{C}^n$ 的有限开复盖 $\{G_j\}_{j=1}^m$，则 $X=\sum_{j=1}^m \varepsilon(\overline{G_j})$，则称 T 具有谱容量 ε。

命题2.5 若 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有谱容量 ε，则对任意 $F\in\mathscr{F}(C^n)$，下列结论成立。

(1) $S_p(T|\varepsilon(F)\subset S_p(T)$；

(2) $S_p(T_i|\varepsilon(F))\subset S_p(T_i)$，$i=1,\cdots,n$；

(3) $\varepsilon(F)\in R(T)$。

证 设 $z\bar{\in} S_p(T)$，则有开集 D 和 D_1，使 $z\in D$，$D\bigcup D_1=\hat{C}^n$，而 $\overline{D}\bigcap S_p(T)=\phi$。于是 $X=\varepsilon(\overline{D})+\varepsilon(\overline{D_1})$。对任意 $x\in\varepsilon(\overline{D})$，存在 $\psi\in\Lambda^{n-1}[\tau\bigcup d\bar{z},C^\infty(U,\varepsilon(\overline{D}))]$ 使 $xt_1\wedge\cdots\wedge t_n=(J\oplus\bar{\partial})\psi$，其中 $U=\hat{C}^n\setminus\overline{D}\supset S_p(T)$。由定义 $R_{z-T}x=0$，因此 $x=0$。由 x 的任意性得 $\varepsilon(\overline{D})=\{0\}$，而 $X=\varepsilon(\overline{D_1})$。于是 $S_p(T|\varepsilon(F))=S_p(T|\varepsilon(F)\bigcap\varepsilon(\overline{D_1}))=S_p(T|\varepsilon(F\bigcap\overline{D_1}))\subset\overline{D_1}$，得 $z\bar{\in} S_p(T|\varepsilon(F))$。又由 z 的任意性得，$S_p(T|\varepsilon(F))\subset S_p(T)$。而且，$S_p(T_i|\varepsilon(F))=\pi_iS_p(T|\varepsilon(F))\subset\pi_iS_p(T)=S_p(T_i)$，$\rho(T_i)\bigcap\rho(T_i|\varepsilon(F))=\rho(T_i)\neq\phi$。因此(1)、(2)、(3)均成立。证毕。

命题2.6 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有谱容量 ε，则 $\text{Supp}\varepsilon=S_p(T)$。

证 若 $F\in\mathscr{F}(\hat{C}^n)$ 且 $\varepsilon(F)=X$，则 $S_p(T)=S_p(T|\varepsilon(F)\subset F$，因此 $S_p(T)\subset\text{Supp}\varepsilon$。另一方面，由命题2.5证明可知若 $z\bar{\in} S_p(T)$，则存在 D 使 $z\in D$ 而 $\varepsilon(\overline{D})=\{0\}$，因而 $z\bar{\in}\text{Supp}\varepsilon$。证毕。

定理2.7 设 $T_1=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有谱容量 ε。f_j 是 $S_p(T)$ 上的解析函数，$j=1,\cdots,m$。则 $f(T)=(f_1(T),\cdots,f_m(T))$ 是[77]定义3.1意义下可分解的。$f(T)$ 的谱容量 ε^* 由等式

$$\varepsilon^*(F)=\varepsilon(f^{-1}(F)\bigcap S_p(T))$$ 唯一确定。

证　若 $F\in\mathscr{F}(C^m)$，令 $\varepsilon^*(F)=\varepsilon(f^{-1}(F)\cap S_p(T))$，则有

(1) $\varepsilon^*(\phi)=\{0\}$，$\varepsilon^*(C^m)=\varepsilon(f^{-1}(C^m)\cap S_p(T))$
$=\varepsilon(S_p(T))=X$；

(2) $\varepsilon^*(\bigcap F_i^*)=\varepsilon(f^{-1}(\bigcap F_i)\cap S_p(T))=\varepsilon(\bigcap f^{-1}(F)\cap S_p(T))$
$=\bigcap\varepsilon^*(F_i)$；

(3) 若 $\{G_j\}_{j=1}^k$ 是 C^m 的开复盖，则 $S_p(T)\subset\bigcup_{j=j}^{k}(f^{-1}(\overline{G_j})$
$\cap S_p(T))$，则 $\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^*(\overline{G_j})=\sum_{j=1}^{k}\varepsilon(f^{-1}(\overline{G_j})\cap S_p(T)=X$；

(4) 由推论1.15，$\varepsilon^*(F)\in\mathrm{Inv}(f(T))$，并且 $f(T|\varepsilon^*(F))$
$=f(T)|\varepsilon^*(F)$，因此 $S_p(f(T)|\varepsilon^*(F))=S_p(f(T|\varepsilon^*(F))$
$=f(S_p(T|\varepsilon^*(F))=f(S_p(T|\varepsilon(f^{-1}(F)\cap S_p(T))))$
$\subset f(f^{-1}(F)\cap S_p(T))\subset F$。

于是 $f(T)$ 是可分解的，且 ε^* 是 $f(T)$ 的唯一的谱容量。证毕。

推论2.8　若 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有谱容量，$\xi_j\in S_p(T_j)$，$A_j=(\xi_j-T_j)^{-1}$，$j=1,\cdots,n$，则 $A=(A_1\cdots,A_n)$ 是可分解的。

推论2.9　若 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有谱容量，则 T 具有 SVEP，且 $\varepsilon(F)=\{x;\sigma(T,x)\subset F\}$ 对任意 $F\in\mathscr{F}(C^n)$ 成立。

证　由推论 2.8，$A=(A_1,\cdots A_n)$ 可分解，因此 A 具有 SVEP。再由命题 1.11 可知 T 具有 SVEP，而且 $\varepsilon(F)=\varepsilon_A\left(\frac{1}{\xi-F}\cap C^n\right)$
$=\left\{x;\sigma(A,x)\subset\frac{1}{\xi-F}\right\}=\{x;\sigma(T,x)\subset F\}$。

定义2.10　设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是交换闭算子组，而 $Y\in\mathrm{Inv}(T)$。若对任意 $Z\in\mathrm{Inv}(T)$ 满足条件 $S_p(T|Z)\subset S_p(T|Y)$，就可推得 $Z\subset Y$，则称 Y 为 T 的极大谱子空间。T 的极大谱子空间的全体记为 $\mathrm{SM}(T)$。

命题2.11　设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有谱容量 ε，则 $Y\in\mathrm{SM}(T)$ 的充要条件是 $Y=\varepsilon(S_p(T|Y))$。

证　若 $F\in\mathscr{F}(C^n)$，则 $\varepsilon(F)=X_T(F)=\{x: \sigma(T,x)\subset F\}$。设 $Z\in \mathrm{Inv}(T)$，$\sigma(T|_Z)\subset S_p(T|\varepsilon(F))$，若 $x\in Z$，$x\in X_{T|Z}(S_p(T|_Z))\subset X_T(S_p(T|_Z))=\varepsilon(S_p(T|_Z))\subset\varepsilon(S_p(T|\varepsilon(F))\subset\varepsilon(F)$，因而 $Z\subset\varepsilon(F)$。反之，若 $Y\in S_M(T)$，则由 $S_p(T|\varepsilon(S_p(T|Y)))\subset S_p(T\backslash Y)$ 可知 $\varepsilon(S_p(T|_Y))\subset Y$。设 $y\in Y$，$Y\in X_T(S_p(T|_Y))=\varepsilon(S_p(T|Y))$，于是 $Y\subset\varepsilon(S_p(T|_Y))$，这样得到 $Y=\varepsilon(S_p(T|_Y))$。证毕。

命题2.12　设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有谱容量 ε，则对任何 $F\in\mathscr{F}(C^n)$，$S_p(T^{\varepsilon(F)})\subset C^n\backslash\mathring{F}$。

证　只要证若 $z_0\in\mathring{F}$，则 $z_0\in\rho(T^{\varepsilon(F)})$。设 $\widetilde{\psi}=\sum x_{(i)}t_{(i)}$，$T_p(z_0)\widetilde{\psi}=0$。由引理 2.3，$\widetilde{x}_{(i)}=x_{(i)}/\varepsilon(F)$，因此，$T_p(z_0)\widetilde{\psi}=\sum\limits_{(i)}\sum\limits_{j}(z_j^0-T_j)x_{(i)}/\varepsilon(F)t_j\wedge t_{(i)}=0$。若 G 是开集。$z_0\in G\subset\overline{G}\subset\mathring{F}$，则 $C^n\backslash\overline{G}$ 和 $\mathring{G}$ 是 C^n 的开复盖，于是 $X=X_1\dot{+}X_2$，其中 $X_1=\varepsilon(C^n\backslash G)$，$X_2=\varepsilon(F)$。因 $X_1,X_2\in R(T)$，于是 $x_{(i)}=z_{(i)}+y_{(i)}$，其中，$z_{(i)}\in D_{(i)}\cap X_1$，$y_{(i)}\in z_{(i)}\cap X_2$。令 $\psi_1=\sum z_{(i)}t_{(i)}$，$\psi_2=\sum y_{(i)}t_{(i)}$，$\psi=\psi_1+\psi_2$，则 $J_p(z_0)\psi_1/\varepsilon(F)=J_p(z_0)\psi/\varepsilon(F)=J_p(z_0)\widetilde{\psi}=0$，因而 $\widetilde{\psi}$ 的各系数在 $\varepsilon(F)\cap\varepsilon(C^n\backslash F)=X_1\cap X_2$ 中，即 $J_p(z_0)\psi_1/X_1\cap X_2=0$。令 $\widetilde{T}_j=(T_j|X_1)^{X_1\cap X_2}$，$j=1,2,\cdots,n$，$\widetilde{T}=(\widetilde{T}_1,\cdots,\widetilde{T}_n)$，则 $\widetilde{T}$ 是交换的闭算子组。若 S 是 X/X_2 到 $X/X_1\cap X_2$ 内的映射：$x/X_2=(x_1+x_2)/x_2\to x_1/X_1\cap X_2$，则 $T_j^{X_2}=S^{-1}\widetilde{T}_jS$。由 [73] 定理 2.1，$S_p(T^{X_2})=S_p(\widetilde{T})\subset S_p(T|X_1)\cup S_p(T|X_1\cap X_2)\subset C^n\backslash G$。因 $z_0\in G$，故 $z_0\bar{\in}S_p(T)$，必有 $\widetilde{\varphi}$ 使 $J_p(z_0)\widetilde{\varphi}=\sum z_{(i)}/X_1\cap X_2t_{(i)}=\psi_1/X_1\cap X_2$。设 $\widetilde{\varphi}=\varphi/X_1\cap X_2$，则 $J_p(z_0)\varphi-\psi_1\in\Lambda^p[\tau(z_0),X_1\cap X_2]$ 并且 $J_p(z_0)\varphi/\varepsilon(F)=\psi_1/\varepsilon(F)=\psi/\varepsilon(F)=\widetilde{\psi}$。最后得到 $z_0\in\rho(T^{\varepsilon(F)})$，于是

命题获证。

命题2.13 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有谱容量 ε。设 $F\in\mathscr{F}(C^n)$，$\{G_j\}_{j=1}^m$ 是 F 的开复盖，则 $\varepsilon(F)\subset\sum_{j=1}^m\varepsilon(\overline{G_j})$。

证 选 $\xi_i\in\rho(T_i)$，令 $A_i=(\xi_i-T_i)^{-1}$，则 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ 可分解，且 $\varepsilon_A(F)=\varepsilon\left(\left(\xi-\frac{1}{F}\right)\cap C^n\right)$。由 [77] 定理，$\varepsilon(F)$ $=\varepsilon_A\left(\left(\xi-\frac{1}{F}\right)\cap C^n\right)\subset\sum_{j=1}^m\varepsilon_A\left(\left(\xi-\frac{1}{G_j}\cap C^n\right)\right)=\sum_{j=1}^m\varepsilon(\overline{G_j})$。证毕。

命题2.14 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有谱容量 ε，则

(1) T_j 具有谱容量 ε_j: $F\to\varepsilon(C\times\cdots\times F\times\cdots\times C)$，$j=1,\cdots,n$;

(2) $\varepsilon(F)=\bigcap\left(\sum_{j=1}^m[\varepsilon_1(\overline{D_{1j}})\times\cdots\times\varepsilon_n(\overline{D_{nj}})];F\subset\bigcup_{j=1}^m(D_{1j}\times\cdots\times D_{nj})\right)$。

证 (1)是显然的，只要证明 (2) 好了。

由命题2.13，$\varepsilon(F)$ 含在等式右边。若 x 属于右边，则 $\sigma(T,x)\subset\bigcap\left\{\bigcup_{j=1}^m D_{1j}\times\cdots\times D_{nj};\bigcup_{j=1}^m(D_{1j}\times\cdots\times D_{nj})\supset F\right\}=F$，因此 $x\in\varepsilon(F)$。证毕。

定义2.15 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 是交换的闭算子组。假若对 C^n 的任意开复盖 $\{G_j\}_{j=1}^m$，必有，$X_j\in\mathrm{Inv}(T)$，$j=1,\cdots,m$，使 $X=\sum_{j=1}^m X_j$，且 $S_p(T|X_j)\subset G_j$，则称 T 具有谱分解性质(SDP)。

定理2.16 设 $T=(T_1,\cdots,T_n)$ 具有 SDP，则 T 具有 SVEP。

证 只要证明对任意 $z\in C^n$，$H^p[\mathscr{U}(\{z\},X),J]=0$，$p=0,\cdots,n-1$。设 $z\in U=U_1\times\cdots\times U_n$，$\psi\in\Lambda^p[\tau,\mathscr{U}(D,X)]$ 且 $J_p\psi=0$。任意取 $\xi_j\in\rho(T_j)$，$j=1,\cdots,n$。若有某 j 使 $z_j=\xi_j$，则 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\rho(T)$，则对任意 p，$H^p[(\{z\},X)),J]=0$。若对每个 i，$z_i\neq$

ξ_i，则有开集 $D_i, D'_i \subset C$，使 $\xi_i \in D'_i \subset \overline{D'_i} \subset \overline{D_i} \subset \overline{D_i} \subset \rho(T_i)$。令$G_i = C \times \cdots \times D_i \times \cdots \times C$，$G'_i = C \times \cdots D'_i \times \cdots C$，$G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i, G' = \bigcup_{i=1}^{n} G'_i$。另选非空开集 $V_i \subset C$ 使 $V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i, V = V_1 \times \cdots \times V_n$，则 $U \backslash \overline{G'}$，$\hat{C}^n \backslash (V \bigcup \overline{G'})$ 和 $\{G_j\}_{j=1}^{n}$是$\hat{C}^n$的开复盖，于是有 X_1，X_2, Y_j，$j = 1, \cdots n$，使 $S_p(T|x_1) \subset U \backslash \overline{G'}$，$S_p(T|X_2) \subset C^n \backslash (V \bigcup \overline{G'})$，$S_p(T|Y_j) \subset G_j, j = 1, \cdots, n$。由谱的投影性质，$S_p(T_j|Y_j) \subset D_j, j = 1, \cdots, n$。因 $D_j \bigcap S_p(T_j) = \phi$，故 $Y_j = \{0\}$。显然$\xi_j \overline{\in} \pi_j(U \backslash \overline{G'})$，这样 $\xi_j \in \rho(T_j|X_1)$。同样也有 $\xi_j \in \rho(T_j|X_2)$。这样 $X_1, X_2 \in R(T)$且 $X = X_1 + X_2$。事实上，我们还有 $\xi_j \in \rho(T_j|X_1 \bigcap X_2)$。这是因为若 $x \in X_1 \bigcap X_2$，则有 $y_j \in X_j, j = 1, 2$，使 $(\xi_j - T_j) y_1 = (\xi_j - T_j) y_2 = x$，于是$(\xi_j - T_j)(y_1 - y_2) = 0$，$y_1 = y_2 \in X_1 \bigcap X_2$，于是 $(\xi_j - T_j)|X_1 \bigcap X_2$ 是满射的，从而$\xi_j \in \rho(T_j|X_1 \bigcap X_2)$。由命题2.4的证明可得$S_p(T^{X_2}) \subset S_p(T|X_1) \bigcup S_p(T|X_1 \bigcap X_2)$。又有 $S_p(T_j|X_1 \bigcap X_2) \subset U_j$。于是 $S_p(T^{X_2}) \subset U$，从而 $S_p(A_j^{X_2}) \subset \dfrac{1}{\xi_j - U_j}$。$H^p[\mathscr{U}(U, X/X_2), J] \cong H^p[\mathscr{U}(V, X/X_2), \alpha] = 0$。因 $J_p \psi / X_2 = 0$，于是有$\widetilde{\varphi} \in \Lambda^p[\tau, \mathscr{U}(U, X/X_2)]$ 使$J_{p-1} \widetilde{\varphi} = \psi / X_2$。设 $\varphi / X_2 = \widetilde{\varphi}$，则 $\psi^* = \psi - J_{p-1} \varphi \in \bigcap^p[\tau, \mathscr{U}(U, X)]$。因 $S_p(T|X_2) \bigcap V = \phi$，必有$\eta$，使 $\psi^* = J_{p-1} \eta$，于是 $\psi = J_{p-1}(\eta + \varphi)$。$H^p[\mathscr{U}(\{z\}, X), J) = 0$得证。

定理2.17 设 $T = (T_1, \cdots, T_n)$有SDP，则对任意 $F \in \mathscr{F}(C^n)$，$X_T(F) \in R(T)$，且对 C^n 中的紧集 F，$T_i|X_T(F)$ 是有界的，$i = 1, \cdots, n$。

证 选 $\xi_i \in \rho(T_i), i = 1, \cdots, n$。设$z \overline{\in} F$，则有多圆柱 D, D'，使 $z \in D' \subset \overline{D'} \subset D \subset C^n \backslash F$，且$\rho(T_i)$ $D_i \neq \phi$。与定理2.6相似，可证有 $X_j \in R(T), j = 1, 2$，使 $X = X_1 + X_2$，且 $\xi_j \in \rho(T_i|X_j), i = 1$，

$\cdots,n,j=1,2$, $S_p(T|X_1)\subset C^n\setminus\{z\}$, $S_p(T|X_2)\subset D'$。对任意$x\in X_T(F)$, $x=x_1+x_2,x_j\in X_j$, $j=1,2$。令$U=D\cap(C^n\setminus\overline{D'}$。因$x\in X_T(F),F\cap U=\phi$,则有$\psi^*\in\Lambda^{n-1}[\tau\cup\overline{dz},C^\infty(U,X)]$使$xt_1\wedge\cdots\wedge t_n=(J\oplus\overline{\partial})\psi^*$。因$U\cap S_p(T|X_2)=\phi$,又有$\psi_2\in\Lambda^{n-1}[\tau\cup\overline{dz},C^\infty(U,X)]$

使 $x_2t_1\wedge\cdots\wedge t_n=(J\oplus\overline{\partial})\psi_2$。令$\psi_1^*=\psi-\psi_2$,则$x_1t_1\wedge t_2\cdots\wedge t_n=C^\infty(J\oplus\overline{\partial})\psi_1^*$。又因$S_p(T^{X_1})\subset S_p(T|X_1)\cup S_p(T|X_1\cap X_2)\subset D'$,则有$\widetilde{\varphi}\in\Lambda^{n-2}[\tau\cup\overline{dz},C^\infty(U,X/X_1)]$使$\psi_1^*/X_1=(J\oplus\overline{\partial})\widetilde{\varphi}$。由于引理2.3,我们可设$\widetilde{\varphi}=\varphi/X_1$,因此$\psi_1=\psi^*-(J\oplus\overline{\partial})\varphi\in\bigcap^{n-1}[\tau\cup\overline{dz},C_\xi^\infty(V,X_j)]$, $j=1,2$。于是

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_D T_\xi(z)(-1)^n\pi x dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$

$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_D T_\xi(z)(-1)^n\pi x_1 dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n+x_2$,其中$x=x_1+x_2$。因$x\in X_T(F)$, $D\cap F=\phi$,因此,$x_2=-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_D T_\xi(z)(-1)^n\pi x_1$

$dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\in X_1,x=x_1+x_2\in X_1$。由$x$的任意性得$X_T(F)\subset X_1$。用$X_z$记$X_1$,于是,$X_T(F)\subset\bigcap_{z\in F}X_z$。又显然$\bigcap_{z\in F}X_z\subset X_T(F)$,这样$X_T(F)=\bigcap_{z\in F}X_z$是$T$的不变子空间。又由于$z\bar{\in}F$, $\xi_i\in\rho(T_i|X_z)$,ξ_i必在$\rho(T_i|X_T(F))$之中,于是$X_T(F)\in R(T)$。

若F是C^n中紧集,则$X_T(F)\subset\bigcap_{i=1}^n D_{Ti}$, $T_i|X_T(F)$是闭的又定义在完备空间$X_T(F)$上,因而必为有界。证毕。

定理2.18 设$T=(T_1,\cdots,T_n)$具有SDP,设f_j在$S_p(T)$上解析,$j=1,\cdots,m$,则$f(T)=(f_1(T),\cdots,f_m(T))$具有SDP。

证 设$\{G_j\}_{j=1}^k$是C^m的开复盖。则$\{f^{-1}(G_j)\}_{j=1}^k$是$S_p(T)$的开复盖。设$D'_i,D_i\subset C$满足条件:$\phi\neq D'_i\subset\overline{D'_i}\subset D_i\subset\overline{D_i}\subset\rho(T_i)$,令

$V_i=C\times\cdots\times D_i\times\cdots\times C$，$V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$，$V'_i=C\times\cdots\times D'_i\times\cdots\times C$，$V'=\bigcup_{i=1}^{n}V'_i$，则 $\{V_i\}_{i=1}^{n}$和$\{f^{-1}(G_j)\backslash\overline{V'}\}_{j=1}^{k}$ 复盖了 $S_p(T)$，因此存在$Y_i(i=1,\cdots,n)$，$X_j(j=1,\cdots,k)$，使 $X=\sum_{i=1}^{m}Y_i+\sum_{j=1}^{k}X_j$，$S_p(T|Y_j)\subset V_j$，$S_p(T|X_j)\subset f^{-1}(G_j)\backslash\overline{V'}$。同定理2.16证明一样得$Y_i=\{0\}$，$i=1,\cdots,n$，$X_j\in R(T)$，$j=1,\cdots,k$。因而，$X_j\in \mathrm{Inv}(f(T))$且$f(T)|X_j=f(T|X_j)$，$S_p(f(T)|X_j)=S_p(f(T|X_j))$ $=f(S_p(T|X_j))\subset f(f^{-1}(G_j))=G_j$，$1\leqslant j\leqslant k$。于是$f(T)$具有SDP。证毕。

参考文献

[1] 王声望，I,Erdelyi，《闭算子的局部谱理论》。苏州大学数学系编印，1984。

[2] 王宗尧，自共轭算子组的联合谱，科学通报，30卷第15期，1124—1126。

[3] 刘光裕，可单位分解多个算子，数学学报，28 (1985) 763—771。

[4] 刘光裕，可单位分解多个算子，数学年刊，7卷(A)(1986) 671-676。

[5] 刘光裕，具有σ′谱密度交换算子组的对偶原理，得数学年刊，8卷，(A)，(1987) 671—676。

[6] 李绍宽，《算子理论导引》，华东师范大学数学系编印，1984。

[7] 李绍宽、顾才兴，关于初等算子的几个问题，数学年刊，9卷(A)，(1988) 188-202。

[8] 李良青，可交换算子组的解析不变子空间，Ⅱ，东北数学，2 (1985) 206—212。

[9] 关肇直，《泛函分析讲义》，高等教育出版社，1959。

[10] 陈晓漫，亚正常算子组的联合谱，待发表于数学学报。

[11] 张奠宙、王宗尧，无界算子组的联合谱，华东师范大学学报（自然科学版）(1983) 第3期。

[12] 张奠宙、王宗尧，Hilbert空间上闭算子组的Taylor联合谱，中国科学A辑(1984)第12期。英文版，1985年第6期。

[13] 张奠宙、黄旦润，乘积谱测度与联合谱，科学通报(1985)，第3期。
[14] 张奠宙、黄旦润，On the joint Spectrum for n-tuple of hyponomal operators。数学年刊（英文版）7B(1)1986。
[15] 黄旦润、张奠宙 Joint Spectrum and Unbounded Operator Algebras。数学学报（英文版）1986 Vol.2 No.3。
[16] 胡善文，Banach 空间上算子张量积的联合本质谱和指标 科学通报 17(1988)1293—1295。
[17] 胡善文，关于亚正常算子组不可约的必要条件，数学年刊，9卷(A)（1988） 541—545。
[18] 黄超成，亚正规算子组的联合谱，待发表于数学年刊。
[19] 夏道行，《线性算子谱理论(I)》科学出版社1983。
[20] 夏道行，《无限维空间上测度和积分论（上册）》科学出版社（1965）。
[21] 黄旦润 正常算子组的联合数值域 华东师范大学学报3(1984) 12—16。
[22] 黄旦润，关于算子组的联合谱及其应用，华东师范大学硕士学位论文 1984。
[23] 柴俊 联合谱的分类及摄动 华东师范大学硕士学位论文（1984）。
[24] 夏道行，严绍宗《线性算子谱论Ⅱ》，科学出版社1987。
[25] 季朕 线性算子组理论中的若干问题。中国纺织大学研究生学位论文（1987）。
[26] Zhang Dianzhou, Huang Danrun; On the joint spectrum for n-tuple of hyponormal operators, Chin, of Math.7B,1(1986),14-23.

[27] Huang Danrun; Joint numerical rangea for unbounded normal operators, Pro. Edinburgh Math. Soc. 28 (1985), 225-232.

[28] Hu Shanwen; Joint essential spectrum and index of tensor product of linear operators in Banach spaces, Kexue Tongbao, Vol.34 No.11, (1989), 885-888.

[29] Hu Shan Wen: Commuting n-tuples of closed operators which possess specttral capacity, Chin. of Math. 8B, 2(1987), 156-169.

[30] Xia Daoxing: On the Semi-hyponormal n-tuple of operators, In Integral Equ. and Operator Theory, 6(1983) 879-898.

[31] Xia Daoxing, On the analytic model of a class of hyponormal operators, Integral Equ. and Operator Theory, 6(1983)135-156.

[32] Albrecht. E, Frunza. : Non-analytic functional calculi in several, variables, Manicscripta Math. 18(1976)327-336.

[33] Albrecht. E, Vasilescu. F.H: Semi-Fredholn complexes, Op. Theory. Advance Appl. 11 (1983), 15-39.

[34] Albrecht. E, Vasilescu. F. H: Spectral decomposition for systems of commuting operators, Proc. Royal Irish Academy, (1981).

[35] Arens, Calderon: Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann. of Math 62(1955)204-206.

[36] Allan. G. R.: On a class of locally convex algebras,

Proc London Math,Soc.(3),17,(1967)91-114.

[37] Berberian S.K.: Approximate proper vectors. Proc. Amer.Math.Soc.,13(1962),111-114.

[38] Binding, Kallstrom,Sleeman.Proc. Roy. Soc. Edinbough,92A,(1982),193-204.

[39] Booss,B, BleeckerD.D: Topology and analysis, Springer-Verlag,(1985)

[40] Brown S.:Some invariant subspaces for subnormal operators, Integral Equ. and Operator Theory, 6 (1978),310-333.

[41] Brown S.,Cherveau B.,Pearcy C.:Contractions with rich spectrum have invariant subspaces, J. Op. Theory.1(1979),123-136.

[42] Brown L.,Douglas R.G.;Fillmore:Uniratary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras,Lecture notes in Math.No 345,Springer-Verlag,1973.

[43] Bunce J.:Characters on singly generated C*-algebras, Proc.Amer.Math.Soc.25(1970),297-303.

[44] Ceausescu Z,Vasilescu:Tensor products and the joint spectrum, Proc. Amer. Math. Soc., 72(1978), 505-508.

[45] Carey R.,Pincus J.:Principal currents, Integral Eq. Op.Theory 8(1985)614-640.

[46] Carey R., Pincus J.: Mosaics, principal functions and mean motion in Von-Neumann algebras, Acta. Math. 138(1977),153-218.

[47] Carey R., Pincus J.: Construction of seminormal

operators with prescribed mosaic, Indiana Univ. Math.J.23(1974),1155-1165.

[48] Cho,M:Sci.Rep.Hirosaki 26,(1979),15-19.

[49] Cho,M and Takaguchi.M: Boundary points of joint numerical ranges,Pacific J.Math 95(1981),27-36.

[50] Cho,M and Takaguchi.M:Identity of Taylor s joint spectrum and Dash s joint spectrum, Studia Math. 70(1981),225-229.

[51] Cho,M and Takaguchi.M: Some classes of commuting n-tuples of operators, Studia Math.80 (1984), 49-63.

[52] Cho, M and Takaguchi. M: Boundary of Taylor s joint spectrum for two commuting operators, Rew. Roum.Math.Pure et Appl.27(1982),863-

[53] Choi M.D, Chandler D,The spectral mapping theorem for joint approximate spectum. Bull. Amer. Math,Soc. 80(1974),317-321.

[54] Cho M.D and Dash A.T:On the joint spectrum of double commting n-tuple of seminormal operators, Glasgow Math.J.26(1985),47-50.

[55] Curto R.E:Fredholm and invertible n-tuples of operators,Tran.Amer.Math.Soc.266(1981), 129-159.

[56] CurtoRE:Fredholm and invertible tuples of bounded linear operators, Ph.D.Dissertation. S. U. N. Y. (1978).

[57] Curto R E:Spectral permanence for joint spectra, Tran.Amer Math.Soc.297(1982),659-665.

[58] Curto R E, Spectral iuclusion for doubly commting

subnormal n-tuples,Proc.Amer.Math.Soc.83(1981).

[59] Curto RE:The spectral of elementary operators,Indiana Univ. Math.J.32(1983)193-197.

[60] Curto R.E.and Herrero D.A: On closures of joint simitarily orbits,Integral Eq.Op.Theory.8 (1985), 489-556.

[61] Curto R.E.and Salinas N: Spectral properties of cyclic subnormal m-tuples, Amer. J.Math. , 107 (1985),113-138.

[62] Dash.A.T.:Joint numerical range, Glasnik Math., 7 (1972),75-81.

[63] Dash.A.T.:Joint spectra,Studia Math.,45 (1973), 225-237.

[64] Davis C Rosenthal P.:Solving linear operator equations,Canad.J.Math.26(1974),1384-1389.

[65] Dixon P.G.:Generalized B*-algebra, London Math. Soc.21 (1970) 693-715.

[66] Douglas R.G:Operator theory and C*-algebra,

[67] Dunford and Schwartz:Linear operator,Part I,Interscience Publishes,(1958).

[68] Durszt E:On the numerical range of normal operators, Acta Soc.Math.25(1964)262-265.

[69] Erdelyi and Lange:Spectral decompositions on Banach space,(1977).

[70] Eschmeier J.:Local properties of Taylor analytic functional calculus Invent. Math. 68(1982), 103-116.

[71] Eschmeier J.:On two notes of the local spectrum for

several commntiug operators, Michigan Math. J 30, (1983), 245-248

[72] Eschmeier J: Equivalent of decomposability and 2-decomposability for several commuting operators, Math. Ann., 262(1983), 305-312.

[73] Eschmeier: Spektralzerlegungen und functionakakule fur vertauschende tupel stetiger und abgeschlossener operatorn in Banachraumen, Schriftenreine des Math. Instituts der Universisat Muster, 2. Serie, Helf 20, 1045, Juli(1981).

[74] Eschmeier: Operator theory Advance and Appl. Vol. 14(1984), 115-123.

[75] Eschmeier: Are Commuting system of decomposable operators decomposable, Op. Theory.

[76] Eschmeier and Putinar: Spectral theory and sheaf theory, J. Reine. Angew. Math. 354(1984), 150-163.

[77] Frunza, S.: The Taylor spectrum and spectral decomposition, J. Functional Analysis, 19(1975), 390-421.

[78] Fialkow, L. A.: Spectral properties of elementary operators, Tran. Amer. Math. Soc. 290(1985). 415-429.

[79] Fialkow, L. A., Essential properties of elementary operators, Acta. Sci. Math. (Szeged) 46(1983), 269-283.

[80] Foias, C., Pearcy, C and Sz-Nagy, B.: The functional model of a contraction and the space, L. Acta Sci. Moth. (Szeged), 43(1981), 273-280.

[81] Foias,C.and Pearcy,C.:(BCP)-opeartors and enrichment of invariant subspaces lattices, J. Op. Theory 9(1983),187-202.

[82] Foias,C.and Pearcy,C.:Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory.

[83] Dynin : Inversion problem for singular integral operator:C*-approach,Proc.Nalt.Acad.Sci. U. S. A.75(1978)No.10,4668-4670.

[84] Conway,J.:Subnormal operators,Research Notes in Math.51 (1981).

[85] Hormander:An Introduction to complex analysis in several variables (1966).

[86] Helton, J.W., Howe,R. :Trace of commutators of integral operators,Acta Math.135(1975),271-305.

[87] Ichinose, T. :On the spectra of tensor products of linear operators in Banach spaces,J.Reine Angew Math.,244(1970),119-153.

[88] Inoue,A.:On aclass of unbounded operator algebras, 65(1976),77-95.

[89] Jacobson:Basic Algebra,1980.

[90] Juneja,P.,:On extreme points of the joint numerical range, Pacific J.Math,67(1976),473-476.

[91] Kato, T.:Perturbation theory for linear operators, (1966).

[92] Lumer, G., Rosenblum, M.: Linear operator equations,Proc.Amer.Soc.E Math.Soc.10(1959), 32-41.

[93] McGhee and Roach, The Spectrum of multiparameter

problems in Hilbert space.

[94] Mike,F.:Several complex variable and complex manifolds (2),London Math Soc.Lecture Note Series 65(1981).

[95] Patet,A.B.:A joint spectrum theorem for unbounded normal operators,Austral Math. Soc., Sev. A 34 (1983),203-213.

[96] Pederson,G.K.:C*-algebra and their automorphism groups,(1979).

[97] Putnam, C.R.: Ranges of normal and subnormal operators,Michigan Math.J 18(1971),33-36.

[98] Putinar,M.: Spectral inclusion for subnormal n-tuples,Proc.Amer.Math.Soc.,90(1984).

[99] Putinar,M.,Base change and the Frodholm index, Integral Eq.Op. Theory,8(1985),674-691.

[100] Robel,G.:On the structure of(BCP)-operators and related algebras J.Op.Theory 12(1984),23-45.

[101] Robel, G.: On the structure of (BCP-operators and related algebras J.Op.Theory 12(1984),235-245.

[102] Rubin, H., Wesler, U.: A note on covexity in Euclidean n-space.Proc.Amer.Math.Soc., 9(1958) 522-523.

[103] Rudin, W.: Function Theory in polydisc,1969.

[104] Rudin, W: Function Theory in the unit ball of C^n,1980.

[105] Sleeman B.D.:Multiparameter spectral theory in Hilber space,1978.

[106] Schatten,R.:Norm ideal of completely contiuous

operators,1960.

[107] Slodkowski,Z.:Studia Math,61(1977)

[108] Sz-Nage,B and Foias,C.: Harmonic analysis of operators on Hilbert space,1970.

[109] Salinas,N.:Quasitriangularity of operators, J.Op. Theory 10(1986)167-205.

[110] Takaguchi M: Joint Maximal numerical range, (to appear)

[111] Takaquchi, M.,and Cho,M., The joint numerical range and the joint essential numerical range,(preprint).

[112] Taylor,J.L.:A joint spectrum for several commuting operators,J.Funct.Anal.,19(1975)390-421.

[113] Taylor,J.L.:The analytic functional calculus for several commuting operators, Acta. Math. , 125 (1970),390-421.

[114] Putnam,C.R:Spectra of polar facts of hyponormal operators, Trans.Amer.Math.Soc.,188(1974), 419-428.

[115] Vasilescu,F.H.:A characterization of the joint spectrum in Hilbert spaces, Rev.Roum.Pure and Appl. 22(1977),1003-1009.

[116] Vasilescu,F.H.:Tensor products and the joint spectrum in Hilbert space,Proc,Amer.Math.Soc.72,(1978),505-509.

[117] Vasilescu.F.H.:Stability of the index of a complex of Banach space,J.Operator Theory 2(1979), 247-275.

[118] Vasilescu, F. H.: On pairs of commuting operators, Studia Math. 62(1977), 201-205.
[119] Vasilescu, F. H.: Analytic Functional Calculus, 1982。
[120] Weidmann: Linear Operators in Hilbert space, 1980.